

Chapitre 16

Polynômes

Sommaire

16.1 Ensemble des polynômes	1
16.1.1 Définitions, opérations de base	1
16.1.2 Degré d'un polynôme, Polynôme dérivé	3
16.2 Racines et factorisation	4
16.2.1 Définitions	4
16.2.2 Racines multiples	5
16.2.3 Existence de racines (hors-programme)	6

16.1 Ensemble des polynômes

16.1.1 Définitions, opérations de base

Définition 16.1

Soit P une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que P est une application polynomiale ou un polynôme (stricto-sensu ces deux termes ne recouvrent pas les mêmes notions mais on fera l'abus de notation) s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un $n + 1$ nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

- Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on appelle alors a_i le coefficient d'indice i de P .
- On appelle polynôme nul le polynôme dont tous les coefficients sont nuls, c'est donc l'application nulle.
- On appelle polynôme constant tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_0$.
- On appelle polynôme affine tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x$.
On appelle monôme de degré k tout polynôme de la forme $P : x \mapsto a_k x^k$.

Définition 16.2: Notation des polynômes (Hors programme)

Par convention on note X l'application $x \mapsto x$. Ainsi $a_k X^k$ est l'application $x \mapsto a_k x^k$.

Avec ces notations $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ se note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

On appelle cette écriture l'écriture développée de P .

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple 16.1. $P(x) = x^2 + 2x + 1$, $Q(x) = x^3 - 4x + 12$ et $R(x) = x^{1000} - 27$ sont des polynômes.

Définition 16.3: Opération sur les polynômes

Soient $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $Q : x \mapsto \sum_{j=0}^d b_j x^j$ deux polynômes. On définit alors les polynômes suivants :

- $P + Q$ est le polynôme défini par $P + Q : x \mapsto P(x) + Q(x)$. On a alors

$$P + Q : x \mapsto \sum_{k=0}^{\max(n,d)} (a_k + b_k) x^k$$

où, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λP est le polynôme défini par $\lambda P : x \mapsto \lambda \times P(x)$. On a alors

$$\lambda P : x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda a_k x^k$$

- PQ est le polynôme défini par $PQ : x \mapsto P(x) \times Q(x)$. On a alors

$$PQ : x \mapsto \sum_{k=0}^{n+d} c_k x^k$$

où

$$\forall k \in \llbracket 0, n+d \rrbracket, \quad c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

là encore, par convention $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > d$.

- $P \circ Q$ est le polynôme défini par $P \circ Q : x \mapsto P(Q(x))$. Il n'y pas vraiment d'écriture simple de $P \circ Q$.

Propriété 16.1. Soit P un polynôme. P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 16.1

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polynôme à coefficients réels. Alors $P = 0$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Remarque 16.1. Il s'agit d'une équivalence! La réciproque est évidente.

Une conséquence importante est le théorème suivant

Théorème 16.2

L'écriture développée d'un polynôme est unique.

En d'autres termes, si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{j=0}^d b_j x^j$ alors $n = d$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = b_k$$

16.1.2 Degré d'un polynôme, Polynôme dérivé**Définition 16.4: Degré d'un polynôme**

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polynôme non-nul.

- On appelle degré de P , noté $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$, c'est-à-dire

$$\deg(P) = \max\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \neq 0\}$$

- On appelle alors $a_{\deg(P)}$ le coefficient dominant de P et $a_{\deg(P)} X^{\deg(P)}$ le terme ou monôme dominant de P .
- (Hors programme) On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est dit unitaire.
- Par convention, on dit que le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

Remarque 16.2. Comme $P \neq 0$ alors $\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \neq 0\}$ est un ensemble fini non-vidé qui admet donc bien un maximum.

Exemple 16.2. Degré et coefficient dominant des polynômes

- $P_1 : x \mapsto 2x - 1$
- $P_2 : x \mapsto -2x^3 + 12x^2 + 1$
- $P_3 : x \mapsto 6x^4 + 12x - 8$
- $P_4 : x \mapsto 3$
- $P_5 : x \mapsto 0$

Remarque 16.3. Par convention le degré du polynôme nul vaut $-\infty$, (ce qui est cohérent avec la convention qui veut que la borne supérieure de l'ensemble vide vaut $-\infty$).

Théorème 16.3: Degré et opération sur les polynômes

Soit P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a alors

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$

Définition 16.5: Polynôme dérivé

Soit P un polynôme réel avec $P : x \mapsto \sum_{k=0}^d a_k x^k$.

On appelle polynôme dérivé de P le polynôme, noté P' défini par

$$P' : x \mapsto \sum_{k=1}^d k a_k x^{k-1}$$

Exemple 16.3. Exemple de polynôme dérivé.

Définition 16.6: (Hors programme)

Soit P un polynôme réel, on appelle k -ième polynôme dérivée de P le polynôme noté $P^{(k)}$ défini par récurrence par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad P^{(k+1)} = (P^{(k)})' \end{cases}$$

Propriété 16.2. Soient P et Q deux polynômes réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

- $(\lambda P)' = \lambda P'$
- $(P + Q)' = P' + Q'$
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$
- $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$

Théorème 16.4: Dérivation et degré

Soit P un polynôme réel non constant. On a alors

$$\deg(P') = \deg(P) - 1$$

et, par suite, si $\deg(P) \geq k$

$$\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$$

16.2 Racines et factorisation

16.2.1 Définitions

Définition 16.7: Racine d'un polynôme

Soit P un polynôme réel et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.

Définition 16.8: Factorisation par un polynôme

Soit P un polynôme non-constant et soit Q un autre polynôme. On dit que P se factorise par Q s'il existe un troisième polynôme R tel que $P = QR$.

Exemple 16.4. On a $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ donc le polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ est factorisable par $x + 1$.

Théorème 16.5: Factorisation et racine

Soit P un polynôme réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

P se factorise par $x \mapsto x - \lambda$ si et seulement si λ est une racine de P .

Exemple 16.5. On a

- $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
- $Q = 6x^3 + x^2 - 19x + 6 = (x + 2)(2x - 3)(3x - 1)$
- $R = x^4 - 6x^2 + 7x - 6 = (x - 2)(x + 3)(x^2 - x + 1) = (x - 2)(x + 3)\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

Théorème 16.6

Soit P un polynôme nul et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ des racines distinctes de P . Alors il existe un polynôme Q tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)Q$$

En particulier on a $k \leq \deg(P)$

Théorème 16.7

Soit P un polynôme réel de degré n . Si P s'annule en $n + 1$ points distincts alors P est le polynôme nul.

Théorème 16.8

Soit P un polynôme réel de degré n possédant n racines réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors P s'écrit sous la forme

$$P : x \mapsto a(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

où a est le coefficient dominant de P .

16.2.2 Racines multiples

Précisons la définition d'une racine d'un polynôme.

Définition 16.9: Racine multiple

Soit P un polynôme réel et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une racine de P s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et Q un polynôme réel tels que

$$P : x \mapsto (x - \lambda)^m Q(x)$$

avec $Q(\lambda) \neq 0$.

On appelle alors m l'ordre de multiplicité de λ ou simplement la multiplicité de λ .

Remarque 16.4. Si $m = 1$ on parle de racine simple, si $m = 2$ on parle de racine double, si $m = 3$ de racine triple, etc.

Exemple 16.6. • 4 est racine double du polynôme $x \mapsto (x - 4)^2$ ainsi que du polynôme $x \mapsto (x - 4)^2(x + 2)$

- 1 est racine triple du polynôme $x \mapsto x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

Corollaire 16.1. Soit P un polynôme réel et $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est racine multiple de P si et seulement si

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = 0.$$

Corollaire 16.2. Soit P un polynôme réel de degré impair. Alors P admet au moins une racine réelle.

Exercice 16.1. — Factoriser $x \mapsto x^2 - 16$ par $x - 4$

— Factoriser $x \mapsto x^3 - 8$ par $x - 2$

— Factoriser $P : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ par $x - 3$.

— Factoriser $Q : x \mapsto x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ par $x - 2$ autant de fois que possible.

16.2.3 Existence de racines (hors-programme)

Tout ce qui suit est hors programme en BCPST et peut-être lu à titre culturel.

Existe-t-il toujours des racines à un polynôme ? Il s'agit d'une question qui a intéressé les mathématiciens pendant longtemps à laquelle il a fallu plusieurs siècles pour avoir une réponse complète

Théorème 16.9: de D'Alembert-Gauss

Soit P un polynôme (à coefficients réels ou complexes) (remarquons que $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$). Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Remarque 16.5. • On appelle aussi parfois ce théorème le théorème fondamental de l'algèbre (bien que la plupart de ses preuves soient analytiques)

- Ce résultat est non constructif, il nous assure de l'existence d'une racine mais ne nous donne pas de moyen de la trouver. On connaît des méthodes pour les polynômes de degré 1, 2, 3 (méthode de Cardan) et 4 (méthode de Ferrari) et Niels Abel a prouvé qu'il n'existait pas de méthode générale pour les degrés supérieurs ou égaux à 5.

Corollaire 16.3. Tout polynôme de degré n à coefficients complexes peut s'écrire comme le produit de n polynôme du premier degré.

Théorème 16.10

Soit P un polynôme (complexe) de degré n . P admet exactement n racines complexes comptées avec multiplicité. On entend par cela qu'une racine de multiplicité m est comptée m fois.

Les polynômes réels étant des cas particuliers des polynômes complexes ce résultat s'applique également à eux.

Exemple 16.7. Par exemple $x \mapsto (x - 1)^4$ admet 1 comme racine de multiplicité 4, il admet donc 4 racines comptées avec multiplicité.