

## TD<sub>17</sub> Dénombrement

### Exercice 1

1. Dans un centre de vacances accueillant cent vingt personnes, on sait que vingt-quatre personnes font du tennis et quinze du canoë. Six personnes pratiquent à la fois tennis et canoë. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports?
2. Dans une classe de 26 élèves, 22 étudient l'anglais, 16 l'allemand et 10 l'espagnol. On sait en outre que 12 étudient à la fois l'anglais et l'allemand, que 4 étudient à la fois l'allemand et l'espagnol et 8 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien d'élèves étudient les trois langues?

### Exercice 2

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue  $n$  tirages d'une boule avec remise.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles?
2. Combien y a-t-il de tirages où la boule noire est sortie au moins une fois?
3. Combien y a-t-il de tirages où la boule noire est sortie au moins deux fois?

### Exercice 3

Donner la partie du cours se rapportant à chacune des situations suivantes ( $p$ -liste,  $p$ -arrangement, permutation,  $p$ -combinaison, ensemble des parties) en précisant la valeur de  $p$  et les ensembles concernés, puis dénombrer l'ensemble demandé.

1. (a) Un codon est formé de 3 nucléotides parmi A, T, C et G. Combien existe-t-il de codons différents? Combien de mains différentes peut-on obtenir?
- (b) Combien existe-t-il de listes Python de longueur 10 ne contenant que les éléments 1, 2 ou 3? (b) Un cinéma projète 10 films en boucle dans 10 salles différentes. Il propose une soirée à la carte où les spectateurs choisissent 4 films à aller voir dans l'ordre de leur choix. Combien de soirées différentes sont possibles?
- (c) On dispose de 4 jetons numérotés de 1 à 4 et d'un plateau comportant 16 cases. Si chaque case doit contenir au plus un jeton, combien y a-t-il de façons de placer les 4 jetons sur le plateau? (c) On divise une classe de 36 élèves en deux groupes de 18 élèves. Combien y a-t-il de résultats possibles?
- (d) Dix hommes et dix femmes vont à un bal. Combien de façons y a-t-il de former 10 couples homme/femme pour la prochaine danse? (d) On divise une classe de 36 élèves en deux groupes de 18 élèves, le groupe a et le groupe b. Combien y a-t-il de résultats possibles?
- (e) Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire successivement et sans remise 10 jetons dans l'urne. Combien de tirages différents sont possibles? (e) Sur un plateau à 9 cases, on choisit de mettre ou non un pion sur chacune des cases. Combien y a-t-il de résultats possibles?
- (f) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BCPST? Combien y en a-t-il pour le mot BIOCHIMIE? (on ne demande pas que les anagrammes formées aient un sens en Français). (f) 36 élèves se placent dans une salle de 44 places. Combien de façons différentes ont-ils de s'asseoir?
2. (a) On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. (g) Un camion de glaces propose 15 parfums différents. Combien de glaces "3 boules" peut-on composer?

**Exercice 4**

Combien y a-t-il de brins d'ADN différents de 12 nucléotides de long formés par 3 adénines (A), 3 thymines (T), 3 cythosines (C) et 3 guanines (G) ?

**Exercice 5**

On distribue une main constituée de 13 cartes issues d'un paquet classique de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains possibles contenant la dame de coeur ?
3. Combien y a-t-il de mains possibles contenant exactement un as ?
4. Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun pique ?
5. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?
6. Combien y a-t-il de mains contenant au plus un coeur ?
7. Les 52 cartes du paquet sont en fait distribuées à 4 joueurs différents (et discernables), chacun en recevant 13. Combien y a-t-il de donnes possibles, c'est-à-dire de distributions des 4 mains ?

**Exercice 6**

On s'intéresse aux anagrammes du mot ANANAS.

1. Combien y en a-t-il en tout ? (réponse : 60)
2. Combien y en a-t-il qui commencent par A ? (réponse : 30)
3. Combien y en a-t-il qui ne se terminent pas par N ? (réponse : 40)
4. Combien y en a-t-il qui contiennent à la suite les lettres S et A (dans cet ordre) ? (réponse : 30)
5. Combien y en a-t-il où les deux N ne se suivent pas ? (réponse : 40)

**Exercice 7**

Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments,  $k$  et  $p$  deux entiers tels que  $k \leq p \leq n$ .

1. Déterminer de deux façons différentes le nombre de couples  $(A, B)$  tels que  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $E$  à  $k$  et à  $p$  éléments et  $|A| = k$ ,  $|B| = p$ , avec  $A \subset B$ . En déduire que

$$\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

C'est la formule du chef généralisée.

2. Redémontrer cette formule par le calcul.
3. Retrouver la formule du chef en prenant  $k = 1$ .
4. Donner une interprétation combinatoire de cette formule similaire à l'interprétation de la formule du chef vue en cours.