Chapitre 18

Limites et continuité des fonctions réelles

Sommaire

Dans ce chapitre, on revient sur la notion de limite pour des fonctions définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ce qu'on appelle une fonction de la variable rélle).

Dans un premier temps, on étend les définitions et les résultats donnés dans le chapitre sur les suites. Puis on introduit la notion de continuité et on prouve les résultats principaux sur les fonctions continues.

18.1 Définition formelle des limites

18.1.1 Voisinage

Définition 18.1: Voisinage

Notons a un réel ou bien un infini. On dit qu'une propriété $P(x)$ dépendant d'une variable x est vraie *sur un voisinage de* a si elle est vraie :

- pour x proche de a quand $a \in \mathbb{R}$: il existe $\delta > 0$ tel que la propriété est vraie pour les x tels que $|x - a| \leq \delta$;
- pour x suffisamment grand quand $a = +\infty$: il existe un $A > 0$ tel que la propriété est vraie pour les x tels que $x > A$;
- pour x suffisamment grand dans les négatifs quand $a = -\infty$: il existe un $A > 0$ tel que la propriété est vraie pour les x tels que $x < -A$.

Exemple 18.1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire avec des quantificateurs mathématiques les phrases

1. f est définie au voisinage de 2.
2. f est positive au voisinage de $+\infty$.
3. Au voisinage de 2, f est comprise entre 2.9 et 3.1.

18.1.2 Limite en $+\infty/-\infty$

On considère un intervalle I non majoré de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Définition 18.2: Limite finie en $+\infty$

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad x \geq A \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Quelle que soit la marge d'erreur fixée (le ε), les valeurs de f sont, au bout d'un moment (à partir de A, qui dépend de ε), proches de l, avec la marge d'erreur fixée. On comparera avec la définition d'une limite finie pour une suite (u_n).

Exemple 18.2. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} + 1$. Alors $f(x)$ tend vers ...

Définition 18.3: Limite $+\infty$ en $+\infty$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall M > 0, \exists A > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad x \geq A \implies f(x) \geq M.$$

La fonction f prend des valeurs aussi grandes que souhaitées, quand la variable est elle-même suffisamment grande.

On a de même la notion de limite $-\infty$ en $+\infty$.

Notation 18.1. On écrit indifféremment :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \text{ ou } \lim_{+\infty} f = l \text{ ou } f(x) \to l \text{ quand } x \to +\infty.$$

Cependant, on ne doit pas utiliser ces notations tant qu'on n'a pas prouvé que la limite existe.

Remarque 18.1. On définit de même les notions de limite finie/$+\infty$/$-\infty$ en $-\infty$.

Théorème 18.1 (Unicité de la limite)
Une fonction ne peut avoir qu'une seule limite en $+\infty$ (ou en $-\infty$).

18.1.3 Limite en un point

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I. Le réel a est ou bien dans I, ou bien est une borne (finie) de l'intervalle I.

Définition 18.4: Limite finie en un point

On dit que f a pour limite l en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Si x est suffisamment proche de a, $f(x)$ est suffisamment proche de l. La contrainte sur la variable x (le δ) est décidée *après* que la contrainte sur $f(x)$ est donnée (le ε).

Définition 18.5: Limite $+\infty$ en un point

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

Remarquons que si f est définie en le point a, elle ne peut pas avoir une limite infinie en ce point.

On définit de même la notion de limite $-\infty$ en a.

Comme pour les limites en un infini, une fonction ne peut avoir qu'une seule limite en un point a.

18.1.4 Limite à gauche, limite à droite

Parfois, le comportement de la fonction est différente à gauche et à droite d'un point. On introduit les définitions suivantes :

Définition 18.6: Limite à droite

On suppose que a n'est pas la borne supérieure de I.

- On dit que f a pour limite à droite l en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad (a < x \leq x + \delta) \implies |f(x) - l|.$$

- On dit que f a pour limite à droite $+\infty$ en a si :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in I, \quad (a < x \leq x + \delta) \implies f(x) \geq M.$$

Remarque 18.2. Notons J l'intervalle $I \cap]a, +\infty[$, constitué des points de I strictement à droite de a. Alors la fonction f a une limite à droite l (finie ou infinie) en a ssi la restriction $f_{|J}$ a une limite en a.

Attention 18.1. On prendra garde au fait que, dans la notion de limite à droite en un point a, la valeur $f(a)$ n'a aucune importance : on regarde uniquement les x qui sont *strictement* à droite de a.

Notation 18.2. On note $\lim\limits_{a^+} f = l$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ lorsque f a pour limite à droite l en a.

De même : on note $\lim\limits_{a^-} f = l$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$ lorsque f a pour limite à droite l en a.

Exemple 18.3. Pour chacun des cas suivants, étudier les limites à gauche et à droite de la fonction donnée au point a :

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ au point $a = 0$.
2. $\tan : \begin{array}{rcl} D_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$ au point $a = \frac{\pi}{2}$.
3. $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{2-x} \end{array}$ au point $a = 2$.
4. La fonction partie entière au point $a = 0$, puis au point $a = n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

18.2 Résultats sur les limites

On étend les résultats vus sur les suites.

18.2.1 Opérations usuelles

On rappelle qu'on étend les opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division) à $+\infty$ et $-\infty$. Cependant, certaines formes ne sont pas définies, notamment :

- $+\infty + (-\infty)$;
- $+\infty \times 0$;
- $+\infty / +\infty$.

On parle alors de *formes indéterminées*.

Remarque 18.3. Tel quel, $1/0$ est une forme indéterminée. Pour résoudre cette forme, on a besoin de *connaître le signe du* 0. Si (en un point a p. ex.) f tend vers 0 en ayant des valeurs positives (quand la variable est proche de a), on écrit $\lim_a f = 0^+$ pour raffiner. Et on a les opérations $1/0^+ = +\infty$ et $1/0^- = -\infty$.

Ne pas confondre avec les notions de limite à gauche et à droite!

Les opérations usuelles sont compatibles au passage à la limite, en dehors des formes indéterminées.

Propriété 18.1: Opérations sur les limites

On considère f_1 et f_2 ayant pour limites l_1 et l_2 (finies ou infinies) en un même point a. Si les opérations sur les limites ne sont pas des formes indéterminées, on a :

- $f_1 + f_2$ a pour limite $l_1 + l_2$ en a ;
- $f_1 - f_2$ a pour limite $l_1 - l_2$ en a ;
- $f_1 \times f_2$ a pour limite $l_1 \times l_2$ en a ;
- f_1 / f_2 a pour limite l_1 / l_2 en a.

On a des résultats analogues si on s'intéresse à une limite en $+\infty$, $-\infty$ ou à des limites à gauche ou à droite d'un point.

Remarque 18.4. L'opération d'exponentiation (puissance) *n'est pas* une opération élémentaire. Comme pour les suites, la stratégie consistant à prendre la limite de la base, puis la limite de l'exposant (ou le contraire) ne fonctionne pas.

Pour résoudre ces limites, on revient le plus souvent à la définition de a^b comme $\exp(b \ln a)$. C'est uniquement quand soit la base soit l'exposant ne dépendent pas de x, qu'on peut procéder plus directement.

18.2.2 Composition

On a un théorème pour les composées fonction/fonction et un autre pour les composées fonction/suite.

Théorème 18.2 (Limite d'une composée de deux fonctions)
Soient g une fonction définie sur J, f une fonction définie sur I. On suppose que $f(I) \subset J$, que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et que $\lim_{y\to b} g(y) = l$ (a, b et l peuvent être finis ou infinis). Alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = l.$$

Exemple 18.4. Limite en $+\infty$ de $f(x) = \exp\big(-(\ln x)^2 + 1\big)$.

Théorème 18.3 (Limite d'une composée fonction/suite)
Soit f une fonction définie sur I, (u_n) une suite prenant ses valeurs dans I. On suppose que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ et que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (avec a et b finis ou infinis). Alors

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = b$$

.

Exemple 18.5. Étudier la limite de la suite de terme général $\cos(1/n)$.

On peut utiliser ce théorème sous sa forme directe pour calculer une limite de suite. Mais il est aussi utile pour montrer qu'une fonction f *n'a pas* de limite en a (fini ou infini). Il suffit en effet d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_n u_n = \lim_n v_n = a$, avec $\lim_n f(u_n) \neq \lim_n f(v_n)$. Si $\lim_a f$ existait, ce serait aussi la limite de $f(u_n)$ et de $f(v_n)$.

Exercice 18.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sin(1/x)$. Montrer que f n'a pas de limite en 0.

18.2.3 Croissances comparées

On rappelle les théorèmes de croissance comparée, avec des fonctions plutôt que des suites. Remarquons qu'il n'y a pas d'analogue à la suite $n!$ dans le monde des fonctions.

Théorème 18.4: Croissances comparées

Soient $a > 1$ et $\alpha, \beta > 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$$

Ainsi, une fonction exponentielle $x \mapsto a^x$ (avec $a > 1$) tend plus vite vers $+\infty$, qu'une fonction puissance. Et n'importe quelle fonction puissance tend plus vite vers $+\infty$ qu'une puissance quelconque de la fonction logarithme.

Attention 18.2. Ces limites sont en $+\infty$. On conseille de ne retenir que celles-là et d'en déduire d'autres analogues, quand elles se présentent.

Attention 18.3. Attention à l'utilisation de l'expression « la quantité $f(x)$ tend plus vite vers $+\infty$ que la quantité $g(x)$ » quand x tend vers $+\infty$ (par exemple). C'est une formulation peu rigoureuse, que tout le monde comprend mais qu'il faut être capable de définir si on l'utilise.

Que siginifie-t-elle ? Cela signifie que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Exercice 18.2. Quelle est la limite en 0^+ de $f(x) = x^2\ln(x)$? Plus généralement, on considère α un réel. Quelle est la limite en 0^+ de $f(x) = x^\alpha \ln(x)$?

Exercice 18.3. Donner les limites en $-\infty$, 0 et $+\infty$ de $f(x) = xe^{1/x}$ (définie sur $\mathbb{R}^*$).

18.2.4 Limites et inégalités

On donne les théorèmes analogues à ceux sur les suites. Pour simplifier les énoncés, on adopte la convention suivante.

Dans la suite, a est un réel ou un infini ; f, g et h sont des fonctions définies sur I et on s'intéresse aux limites de ces fonctions en a.

Théorème 18.5 (Passage à la limite dans une inégalité)
On suppose que l'inégalité $f(x) \geq g(x)$ est vraie quand x est sur un voisinage de a. Alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \geq \lim_{x\to a} g(x).$$

Attention 18.4. Même si l'inégalité $f(x) > g(x)$ est stricte, on ne peut déduire que l'inégalité large $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Théorème 18.6 (Signe d'une fonction déduit de sa limite)
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$. Alors, l'inégalité $f(x) > 0$ est vraie sur un voisinage de a.

Attention 18.5. Le théorème ne permet pas d'affirmer que l'inégalité $f(x) > 0$ est vraie pour tout x de I. Elle dit juste que l'inégalité est vraie si x est *proche* de a (en un sens à adapter si a est un infini).

De façon générale, un résultat sur une limite ne permet jamais de déduire un résultat portant sur les valeurs d'une fonction sur tout son intervalle de définition.

Théorème 18.7: Théorème des gendarmes

On suppose que, pour x dans un voisinage de a, on a $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ existent et sont égales. Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe et on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$$

.

Attention 18.6. Contrairement aux théorèmes précédents, celui-ci *affirme l'existence* d'une limite.

Exemple 18.6. On considère $f(x) = x\sin(1/x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f admet une limite en 0.

On dispose de théorèmes analogues pour des limites infinies.

Théorème 18.8: ***de comparaison***

On suppose que sur un voisinage de a, l'inégalité $f(x) \geq g(x)$ est vraie et que $\lim_a g = +\infty$. Alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Énoncé analogue avec une limite $-\infty$.

Enfin, de même que pour les suites, on dispose du

Théorème 18.9: Théorème de la limite monotone

Soit f une fonction monotone définie sur un intervalle $I =]a, b[$, avec a et b finis ou infinis. Alors f admet une limite en a et une limite en b.

Attention 18.7. Le théorème est faux si I contient ses bornes. Penser à f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x$ si $x < 1$ et $f(1) = 2$.

18.2.5 Asymptotes verticales, horizontales

On rappelle ici les définitions des notions d'asymptotes verticales ou horizontales à la courbe d'une fonction.

Définition 18.7. Soit $f : D \to R$. Soient également $a \notin D$ et $b \in \mathbb{R}$. On dit que

- la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f lorsque

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

- la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f lorsque

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Exercice 18.4. Etudier les asymptotes de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{2x+4}$.

18.3 Fonctions équivalentes

18.3.1 Définition

Définition 18.8

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de x_0. On suppose (dans toute cette partie) que f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0 sauf éventuellement en x_0.
On dit que f est équivalente à g en x_0, ce que l'on note $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou encore $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Propriété 18.2. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies au voisinage de x_0.*

- $f \underset{x_0}{\sim} f$
- $f \underset{x_0}{\sim} g$ *si et seulement si* $g \underset{x_0}{\sim} f$
- *Si* $f \underset{x_0}{\sim} g$ *et* $g \underset{x_0}{\sim} h$ *alors* $f \underset{x_0}{\sim} h$

Exemple 18.7. On a les équivalents suivants :

- $x^3 + x \underset{0}{\sim} x$,
- $x^3 + x \underset{+\infty}{\sim} x^3$.

Remarque 18.5.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, on a $f \underset{x_0}{\sim} \ell$ si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.
- En général une fonction ne peut pas être équivalente à 0. Par convention on dit que $f \underset{x_0}{\sim} 0$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit identiquement nulle sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$.

Propriété 18.3. *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de x_0.*

On suppose que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *et* $f \underset{x_0}{\sim} g$, *alors* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Les équivalents suivants sont à connaître

Propriété 18.4

Soit $P(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k$ un polynôme de degré n. Alors

$$P(x) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n \qquad P(x) \underset{-\infty}{\sim} a_n x^n \qquad P(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$$

Remarque 18.6. Autrement dit, un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré en $+\infty$ et en $-\infty$ et est équivalent à son monôme de plus bas degré en 0

La propriété suivante est admise pour le moment, et à connaître !

Propriété 18.5: Équivalents classiques

- $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
- $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x$
- Si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

18.3.2 Manipulation des équivalents

Propriété 18.6

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f, f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies au voisinage de x_0.

— Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$

— Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^n \underset{x_0}{\sim} g^n$

— Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $\frac{1}{f} \underset{x_0}{\sim} \frac{1}{g}$

Remarque 18.7. — On ne somme pas les équivalents, par exemple

$$x + 2 \underset{+\infty}{\sim} x - 1 \qquad -x \underset{+\infty}{\sim} -x$$

Mais $2 \underset{+\infty}{\not\sim} -1$

— On ne compose pas les équivalents par une fonction, si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors rien ne dit que $h \circ f \underset{x_0}{\sim} h \circ g$. Par exemple $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $e^{x+1} \underset{+\infty}{\not\sim} e^x$.

Si, en général, on ne peut pas composer les équivalents par une fonction, dans certains cas très particuliers, c'est possible.

Exercice 18.5. — Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$.

— Déterminer la limite de $\ln(1 + \sin(x))/x$ quand x tend vers 0.

— Déterminer un équivalent simple de $\ln(\cos(x))$ en 0.

18.4 Continuité

18.4.1 Continuité en un point

Définition 18.9: Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a un point de I. On dit que f est *continue* en a si f admet une limite (finie) en a (nécessairement égale à $f(a)$).

Remarque 18.8. Parler de continuité en a présuppose donc que la fonction est définie en a. Il revient au même de demander que f admet une limite à gauche, une limite à droite (quand parler de ses limites a un sens) et que ces limites sont égales à $f(a)$.

Définition 18.10: Continuité à gauche, continuité à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit a un point de I. On suppose que a n'est pas la borne supérieure de I. On dit que f est *continue à droite* en a si f admet une limite à droite en a, égale à $f(a)$.
De même pour la continuité à gauche, en un point a différent de la borne inférieure de I.

Exemple 18.8. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en tout point $a \notin \mathbb{Z}$. En un point $a \in \mathbb{Z}$, elle est continue à droite, mais pas à gauche.

Parfois, une fonction f est définie par une formule qui n'a pas de sens en un point a. On peut alors se demander si on peut étendre la fonction f au point a, de sorte que l'extension soit continue en a.

Définition 18.11: Prolongement par continuité

Soit I un intervalle, soit a un point de I. On suppose que f est définie sur $I - \{a\}$. On dit que f *est prolongeable par continuité* en a si f admet une limite finie en a.

Remarque 18.9. En notant l cette limite, on peut alors poser $f(a) = l$ et la fonction f étendue au point a est continue en a.

Exercice 18.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin(1/x)$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 18.7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.

18.4.2 Continuité sur un intervalle

Définition 18.12: Fonction continue sur intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est *continue sur I* si elle est continue en tout point de I.

Les théorèmes sur les limites permettent de montrer la continuité de fonctions créées définies à partir de fonctions continues.

Théorème 18.10
Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I.

- *La fonction $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I.*
- *La fonction fg est continue sur I.*
- *Si g ne s'annule pas sur I, f/g est continue sur I.*

Théorème 18.11
Soient f continue sur I, g définie sur J, avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Les fonctions continues jouissent de propriétés importantes : non-explosion des valeurs (sur un segment) et propriété des valeurs intermédiaires.

Théorème 18.12: Propriété des bornes atteintes

Soit $I = [a, b]$ un segment. Si f est une fonction continue sur I, f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 18.10. L'ensemble $f(I)$ des valeurs prises par f est donc minoré et majoré. Notons m et M ses bornes inférieure et supérieure. Le théorème affirme qu'il existe deux réels x_m et x_M dans I tels que $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$.

Attention 18.8. Le théorème est faux si I n'est pas un segment. Penser à $f(x) = 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $g(x) = \tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Théorème 18.13: Propriété des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a < b$ deux points de I. Si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Corollaire 18.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire 18.2. *Soit f une fonction continue sur un segment $I = [a, b]$. Alors $f(I) = [m, M]$, où m et M sont les bornes inférieure et supérieure (ici, minimum et maximum) des valeurs prises par f.*

18.4.3 Bijections continues

Dans le cas où, en plus d'être continue, la fonction f est strictement monotone, la situation est idéale.

Théorème 18.14: Théorème de la bijection continue

Soit f une fonction continue et strictement monotone définie sur un intervalle I. Alors

- $f(I) = J$ est un intervalle;
- $f : I \to J$ est une bijection;
- Sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et est strictement monotone, de même monotonie que f.

Propriété 18.7. *Soit f une application continue et strictement croissante sur I :*

- *Si $I = [a, b]$, $f(I) = [f(a), f(b)]$;*
- *Si $I =]a, b]$, $f(I) =]\lim_a f, f(b)]$;*
- *Si $I = [a, b[$, $f(I) = [f(a), \lim_b f[$;*
- *Si $I =]a, b[$, $f(I) =]\lim_a f, \lim_b f[$.*

Soit f une application continue et strictement décroissante sur I :

- *Si $I = [a, b]$, $f(I) = [f(b), f(a)]$;*
- *Si $I =]a, b]$, $f(I) =]f(b), \lim_a f]$;*
- *Si $I = [a, b[$, $f(I) = [\lim_b f, f(a)[$;*

- *Si* $I =]a, b[$, $f(I) =]\lim_b f, \lim_a f[$.

On utilise ce théorème pour construire les bijections réciproques de certains fonctions usuelles (et obtenir leurs propriétés).

Exponentielle et logarithme. Supposons qu'on a défini la fonction exponentielle et qu'on a montré qu'elle était continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec limites 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

Ainsi, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection. Par le théorème de la bijection continue, sa bijection réciproque – notée ln – est définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, est continue et strictement croissante.

Fonctions puissances et racines n-ème. Soit $n \geq 1$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$ est continue. Ses variations dépendent de la parité de n :

- Si n est impair, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- Si n est pair, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, le calcul des limites en $+/-\infty$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que

- Si n est impair, $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
- Si n est pair, $f_n(\mathbb{R}) = f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

On applique maintenant le théorème de la bijection continue à $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n est impair, et à $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ si n est pair. On en déduit l'existence d'une application, notée $\sqrt[n]{\ }$ dans les deux cas, telle que :

- Si n est impair, $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, de limites $+/-\infty$ en $+/-\infty$.
- Si n est pair, $\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue, strictement croissante, de limite $+\infty$ en $+\infty$ et de valeur 0 en 0.

On a par exemple $\sqrt[4]{16} = 2$ (car $2^4 = 16$) et $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Notons que, pour n impair, si $x < 0$, on a $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$: la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est impaire, comme la fonction $x \mapsto x^n$).

Fonction tangente et arctangente. On rappelle que la fonction tangente est bien définie en tout point qui n'est pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$, tan est continue, strictement croissante et de limites $-\infty$ en $-\pi/2$ et $+\infty$ en $\pi/2$.

En utilisant les limites et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $\tan(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. Par le théorème de la bijection continue, sa bijection réciproque, notée arctan est définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$, elle est continue et strictement croissante.

Fonctions cosinus et arccos, fonctions sinus et arcsin. On rappelle simplement que $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est une bijection continue strictement décroissante et que $\sin : [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$ est une bijection continue strictement croissante.

On en déduit l'existence des bijections réciproques $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ et $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi, \pi]$. Elles sont continues, arccos est strictement décroissante et arcsin strictement croissante.