TD$_{18}$ Limites et continuité des fonctions

1 Calcul de limites

Pour d'autres exercices, y compris de révision, sur le calcul de limites, vous pouvez vous entraîner sur les fiches du cahier de calcul disponibles sur cahier de prépa (dossier Remédiation).

Exercice 1 (• • ○)
Calculer la limite de $\dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$ en 3 et en $+\infty$.

Exercice 2 (• • ○)

1. Déterminer la limite de $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ et de $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ en 1.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{x^3+1}{x+1}$ et de $\dfrac{x^5+1}{x+1}$ en -1.

Exercice 3 (• • ○)
Déterminer la limite de la fonction suivante en 1 et en $+\infty$:

$$f : x \longmapsto \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2+2x-3}$$

.

Exercice 4 (• • ○)

1. Calculer la limite de : $\dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la limite de : $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 5 (• ○ ○)
Montrer que $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0+.

Exercice 6 (• • ○)

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0.
2. En déduire les limites : $x \longmapsto x^{\frac{1}{x-1}}$ en 1 et $x \longmapsto (1+e^{-x})^{e^x}$ en $+\infty$.

2 Continuité des fonctions

Exercice 7 (• ○ ○)
La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [0, \pi/2], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 8 (• • ○)
On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x-1} \end{array}$.
Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 9 (•◦◦)
Montrer que les fonctions suivantes sont continues en x_0 :

1. pour $x_0 = 2$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - 6 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$
2. pour $x_0 = 1$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 2 \\ f(x) = \frac{2\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 10 (••◦)
Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|+1}$
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
3. La fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall x \in [-1;0[\cup]0;+\infty[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Exercice 11 (••◦)
Soit f le polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^8 + x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que f possède au moins deux racines réelles.
2. Montrer qu'il existe une unique racine α qui vérifie $0 < \alpha < 1$.
3. Déterminer une valeur approchée de α à l'aide votre calculatrice ou d'un ordinateur.

Exercice 12 (••◦)
Dans les cas suivants, déterminer si la fonction f est prolongeable par continuité en a.

1. pour $a = -1$ et f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x+1}$,
2. pour $a = 2$ et f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3-8}{(x-2)^2}$,
3. pour $a = 1$ et f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x-1) - \ln(x-1)$.
4. pour $a = 2$ et f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} & \text{si } x > 2 \\ f(x) = x^2 - x - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Exercice 13 (•◦◦)
Soit f la fonction définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1-x}$

Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$.

Exercice 14 (•◦◦)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$

Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3 Utilisation des théorèmes de continuité

Exercice 15 (•◦◦)
Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{x}$.

Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{10}$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16 (• ∘ ∘)
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ dans un intervalle J à déterminer.
2. Établir le tableau de variations de f^{-1} sur J.

Exercice 17 (• ∘ ∘)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. Montrez que f réalise une bijection de $]-\infty; 0]$ dans un intervalle que vous déterminerez.

Exercice 18 (• ∘ ∘)
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que $f : x \longmapsto x - \ln(x)$.
Montrer que l'équation $f(x) = 3$ a exactement deux solutions sur $]0; +\infty[$.

Exercice 19 (• • ∘)

1. Déterminer la limite de $\frac{e^{(x^2)}}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^{(x^2)}-1}{x}$.
   (a) Montrer que f peut être prolongée par une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (On notera toujours f ce prolongement)
   (b) $(*)$ Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que tout réel λ possède un unique antécédent par f.

Exercice 20 (• • ∘)
Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$, (f *est définie sur* $[0, 1]$ *et elle prend ses valeurs dans* $[0, 1]$).
Montrer que f admet (au moins) un point fixe. (*ie.* un $c \in [0; 1]$, tel que $f(c) = c$)

Exercice 21 (• • ∘)
Montrer qu'une fonction continue et ne s'annulant pas sur son intervalle de définition est de signe constant.

4 Suites implicites

Exercice 22 (• • ∘)
Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 2[$ dans un intervalle que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout entier $n > 2$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $]0, 2[$, (notée u_n).
3. Déterminer le sens de variation de (u_n) et étudier sa limite.

Exercice 23 (• • •)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation : $\ln(x) = x^{-n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Déterminer à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculette l'allure de x_n en fonction de n.
3. Montrer que x_n est minorée par 1.
4. Déterminer la monotonie de (x_n). En déduire que (x_n) est convergente.
5. Montrer que (x_n) converge vers 1. (*On pourra raisonner par l'absurde*)

Exercice 24 (• • ∘)
Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par : $f_n(t) = e^{nt} + t + t^3$

1. (a) Étudier les variations de la fonction f_n.
   (b) Montrer que l'équation $f_n(t) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera t_n.

   (c) Quel est le signe de t_n ?

2. (a) Pour tout entier n, déterminer le signe de $f_{n+1}(t_n)$
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (t_n).
   (c) Montrer que cette suite converge.

On note : $l = \lim_{n\to+\infty} t_n$.

3. (a) Montrer que si $l < 0$ alors la suite $\big(f_n(t_n)\big)$ a une limite non nulle.
   (b) Quelle est la valeur de l ?
   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} n\,t_n$.