TD$_{19}$ Probabilités 1 : événements aléatoires

1 Introduction

Exercice 1 (• ○ ○)
Un code de cadenas se compose de 3 chiffres compris entre 0 et 9. On choisit au hasard un code. Quelle est la probabilité que tous les chiffres du code soient pairs ? Quelle est la probabilité qu'au moins un chiffre du code soit impair ?

Exercice 2 (• ○ ○)
Une urne contient 4 jetons numérotés 1,2,3,4. On en prend deux au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir les jetons 1 et 4 ?

Exercice 3 (• ○ ○)
Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On en tire successivement au hasard et sans remise. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des nombres pairs ?

Exercice 4 (• • ○)
Un dé à 6 faces est truqué de sorte que le dé 6 sort deux fois plus souvent que chacune des 5 autres faces, qui sortent elles avec des probabilités égales.

1. Calculer la probabilité que le dé prenne la valeur k pour $k \in [\![1,6]\!]$.
2. Quelle est la probabilité que le résultat du lancer de dé soit pair ?

Exercice 5 (• • ○)
Une urne contient 5 boules rouges, 6 boules vertes, 7 boules bleues.

1. On tire un boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?
2. On tire simultanément deux boules. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
3. On tire simultanément deux boules. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge et une boule verte ?
4. On tire simultanément quatre boules. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge ?
5. On tire simultanément quatre boules. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux boules rouge ?
6. On tire simultanément quatre boules. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux boules rouge ou deux boules vertes ?

Exercice 6 (• ○ ○)
On possède un dé dont l'apparition des différentes faces suit la loi de probabilité

1	2	3	4	5	6
1/3	1/12	1/3	1/12	1/12	1/12

1. En lançant une fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir une face paire ?
2. En lançant deux fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir au moins une face paire ?
3. On lance ce dé un grand nombre de fois. Quelle est la fréquence d'apparition de la face 1 ? Quelle est la moyenne des faces obtenues ?

2 Formules des probabilités composées et des probabilités totales

Exercice 7 (• ○ ○)
Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire ?

Exercice 8 (• • ○)
On tire successivement deux boules dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules rouges.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir tiré deux boules rouges ?
3. Quelle est la probabilité que la seconde boule tirée soit rouge ?
4. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une des deux boules soit rouge ?
5. La seconde boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité que la première boule tirée le soit aussi ?

Exercice 9 (• • ○)
On dispose de trois urnes numérotées de 0 à 2 :

- l'urne 0 contient 1 boule blanche et 3 boules noires,
- l'urne 1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires,
- l'urne 2 contient 3 boules blanches et 1 boule noire.

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite, puis on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de "Pile" obtenu. On introduira les évènements appropriés, et on indiquera quelle formule du cours on utilise.

1. Quelle est la probabilité de choisir l'urne 2, i.e. d'avoir obtenu 2 fois "Pile" ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche sachant qu'on a choisi l'urne 2 ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
4. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 2 ?

3 Formule de Bayes

Exercice 10 (• • ○)
Un questionnaire à choix multiple propose une question où m réponses sont proposées et 1 seule est juste. Un étudiant a une probabilité p de connaître la réponse à la question. S'il ne la connaît pas, il répond au hasard. Quelle est la probabilité que l'étudiant connaisse effectivement la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 11 (• • ○)
Lors d'un jeu, un candidat choisit une question en tirant au hasard un papier parmi trois. Il y a :

- une question facile, pour laquelle on a 3 chances sur 4 de donner la réponse exacte,
- une question moyenne, pour laquelle on a 2 chances sur 5 de donner la réponse exacte,
- une question difficile, pour laquelle on a 1 chances sur 5 de donner la réponse exacte.

Sachant que le candidat a donné la bonne réponse, quelle est la probabilité qu'il ait tiré la question facile ?

4 Indépendance d'événements aléatoires

Exercice 12 (• ◦ ◦)
Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements A ="tirage d'un nombre pair", B ="tirage d'un multiple de 3". Les événements A et B sont-ils indépendants ? Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 13 (• • ◦)
Lors d'une séance de tirs au but, un footballeur a une probabilité $p \in [0,1]$ de marquer à chaque essai. Il réalise n essais qu'on suppose indépendants. Déterminer les probabilités que :

1. il marque au moins un but,
2. il marque exactement un but, lors de sa dernière tentative,
3. il marque exactement 1 but,
4. il marque exactement k buts.

Exercice 14 (• • ◦)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On joue n fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les lancers sont mutuellement indépendants. On gagne si l'on obtient deux fois de suite le même résultat. Quelle est la probabilité de gagner ?

5 Succession d'événements aléatoires

Exercice 15 (• • •)
Un groupe d'éléphants se déplace tous les ans entre trois zones d'habitat distinctes : la zone A, la zone B et la zone C. À l'année $n = 0$, les éléphants sont dans la zone A. Puis chaque année $n \in \mathbb{N}$ ils changent ou non d'habitat pour l'année $n+1$ de la manière suivante :

- ils restent dans la zone où ils sont avec probabilité $1/2$
- ils se déplacent de la zone où ils sont pour aller dans une des deux autres zones avec probabilité $1/4$ pour chaque zone.

On note a_n la probabilité de l'évènement A_n : "les éléphants sont dans la zone A à l'année n". On note similairement b_n et c_n les probabilités des évènements B_n et C_n. Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1. Que valent a_0, b_0, c_0 ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'événements. En écrivant la formule des probabilités totales dans ce s.c.e, exprimer a_{n+1}, b_{n+1}et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
3. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = \frac{1}{4} M X_n.$$
4. Montrer que $M^2 = 5M - 4I_3$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$M^n = \frac{4^n - 1}{3} M - \frac{4^n - 4}{3} I_3.$$
5. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n. Quelle est la limite de a_n, b_n et c_n quand $n \to \infty$?

Exercice 16 (• • •)
Une compagnie aérienne étudie la réservation des places sur l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour de l'ouverture de la réservation puis évolue chaque jour jusqu'à la fermeture des réservations de la manière suivante :

- si la place est réservée au jour k, elle l'est encore au jour $k+1$ avec probabilité $9/10$,
- si la place est libre au jour k, elle est réservée au jour $k+1$ avec probabilité $4/10$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note r_k la probabilité que la place soit réservée au jour k.

1. Exprimer r_{k+1} en fonction de r_k.
2. En déduire l'expression de r_k en fonction de k.
3. Si ce comportement de réservation dure suffisamment longtemps et jusqu'au jour du décollage, l'avion sera-t-il plein au moment du départ ?

6 Autres - pour aller plus loin

Exercice 17 (• • •Paradoxe des anniversaires)

1. Combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que la vôtre ?
2. Combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe deux personnes ayant la même date d'anniversaire ?
3. Quelle est la probabilité que deux élèves de BCPST 1A aient la même date de naissance ?

Exercice 18 (• • •Problème de Monty Hall)
Il s'agit d'un problème iconique : un jeu télévisé oppose un présentateur à un candidat (le joueur).

Le joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'entre elles, se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Le joueur doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

Les questions qui se posent au candidat sont :

1. Que doit-il faire ?
2. Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Exercice 19 (• • •)
Un archer dispose de deux cibles, une à 20 mètres et une à 50 mètres. Il effectue trois tirs successifs et doit changer de cible à chaque nouveau tir. On suppose que les trois tirs sont indépendants et qu'il a une probabilité p d'atteindre la cible à 20 mètres, et q d'atteindre celle à 50 mètres, avec $p > q$. Il parie avec ses amis qu'il peut atteindre deux cibles de suite. Pour maximiser ses chances de gagner son pari, doit-il commencer par viser la cible à 20 mètres ou celle à 50 mètres ?