DS7 – Mathématiques

Mercredi 2 Avril 2025

Durée : 2 heures

- **Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.**
- **Utilisez des feuilles doubles à carreau uniquement.**
- Le devoir comporte trois exercices et un problème.
- La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes (en justifiant succinctement et proprement) :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+1-\dfrac{2}{x}\right)(2x+1)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x+1}-\sin(x)$
4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(2x)}{e^x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Exercice 2.

1. Factoriser au maximum le polynôme $P : x\mapsto x^4-16$ dans $\mathbb{R}[X]$ (l'ensemble des polynômes à coefficients réels).
2. A l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer tous les polynômes P vérifiant $(P')^2=4P$.

Exercice 3. Dans cet exercice particulièrement, on veillera à accompagner toute réponse d'un argument, si possible court et précis.

1. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chaque chiffre étant compris entre 1 et 9.
   (a) Combien il y a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien il y a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   (c) Combien il y a-t-il de codes contenant au moins une fois le chiffre 4 ?
2. Pour les questions suivantes, on souhaite que le code contienne trois chiffres distincts.
   (a) Combien il a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien il y a-t-il de codes contenant le chiffre 6 ?
3. Combien il y a-t-il d'anagrammes du mot « cadenas » ?

Problème (Tiré du concours blanc de l'an dernier)**.** Lorsque $a\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, on définit la fonction f_a sur $]0,+\infty[$ par

$$f_a(x)=x^a-ax+1.$$

On admettra qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

1. (a) Soit $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Justifier la bijectivité de l'application $G_m : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^m \end{array}$ et que, lorsque m et x sont dans $]0,+\infty[$, $\quad G_m^{-1}(x)=x^{1/m}$
   (b) Donner en fonction de $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ le signe de l'expression x^m-1 sur $]0,+\infty[$ (on pourra distinguer les cas selon le signe de m).
2. On fixe ici un réel $a\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$.
   Calculer la dérivée de f_a et donner le tableau de signe de f_a' sur $]0,+\infty[$ en distinguant selon que $a<1$ ou bien $1<a$.
3. On suppose ici que $0<a<1$.
   (a) Déterminer le tableau de variations complet de f_a et le maximum de f_a que l'on notera $M(a)$.
   (b) Montrer que la fonction f_a s'annule en un unique réel que l'on notera $u(a)$.
   (c) Trouver les racines du polynôme $P(X)=\frac{1}{2}X^2-X-1$ puis montrer que $u(1/2)=4+2\sqrt{3}$.

(d) Montrer que $u(a) > 1 + 1/a$.

4. À partir des résultats précédents, montrer que $u(a)$ possède une limite que l'on précisera lorsque $a \to 0^+$.

5. On suppose ici que $2 \leq a$.

   (a) Déterminer le tableau de variations complet de f_a et le minimum de f_a que l'on notera $m(a)$.

   (b) Montrer que la fonction f_2 s'annule une unique fois en un réel $u(2)$ que l'on donnera.

   (c) Montrer que, si $a > 2$, la fonction f_a s'annule en deux réels exactement, $u(a)$ tel que $0 < u(a) < 1$ et $v(a)$ tel que $v(a) > 1$.

On retiendra que, pour tout réel $a \in]0,1[\cup [2,+\infty[$, $u(a)$ est solution de l'équation

$$\mathscr{E}_a : \quad x^a - ax + 1 = 0.$$

6. On suppose ici que $1 < a$.

   (a) Montrer que $0 \leq au(a) - 1 \leq 1$.

   (b) En déduire que $u(a)$ possède une limite que l'on précisera lorsque a tend vers $+\infty$.

   (c) Déterminer la limite de $u(a)^a$ lorsque a tend vers $+\infty$.

   (d) Conclure que, lorsque $a \to +\infty$, $\quad u(a) \sim 1/a$.

7. On s'intéresse ici aux nombres $u(n)$, que l'on pourra également écrire u_n, lorsque n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note aussi $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=2}^{n} (u_k)^k$.

   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, $\quad u_k \geq 1/k$. (on pourra utiliser $\mathscr{E}_k$)

   (b) Montrer, à partir d'une étude de fonction, que pour tout $t \geq 0$, $\quad t \geq \ln(t+1)$.

   (c) En déduire que, pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, $\quad u_k \geq \ln(k+1) - \ln(k)$.

   (d) Montrer que, pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, $\quad S_n \geq \ln(n+1) - \ln(2)$.

   (e) Conclure que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ possède une limite que l'on précisera.

   (f) Montrer que, pour tout $k \in [\![2,+\infty[\![$, $\quad 0 \leq (u_k)^k \leq (2/k)^k$ (on pourra utiliser la question 8)

   (g) En déduire que, pour tout $k \in [\![3,+\infty[\![$, $\quad 0 \leq (u_k)^k \leq (2/3)^k$.

   (h) Montrer que, pour tout $n \in [\![3,+\infty[\![$, $\quad T_n \leq (u_2)^2 + 3(2/3)^3$.

   (i) À partir des deux questions précédentes, établir la monotonie et la convergence de la suite $(T_n)_{n\geq 2}$ dont on ne cherchera pas la limite.