

Informatique - TP 11

Expériences aléatoires

M. Marmorat, M. Morel

2 avril 2025

Dans ce TP, vous travaillerez sur la simulation d'expériences aléatoires : lancer de dé, de pièce, tirage dans une urne, etc.

Exercice 1 **Introduction à l'aléatoire** Nous utiliserons aujourd'hui la bibliothèque `random`. Elle contient un ensemble de fonctions pour simuler des expériences aléatoires. On l'importe classiquement avec l'alias `rd`, on saisira donc en début de script :

```
1 import random as rd
```

Tester plusieurs fois dans la console, en remplaçant les paramètres par des valeurs choisies, les fonctions suivantes, que renvoient-elles ?

```
1 #a et b sont deux nombres reels de votre choix
2 rd.uniform(a,b)
3 rd.randrange(a, b, s) #s est un nombre reel de votre choix
4 rd.randint(a,b)
5 #L est une liste de votre choix
6 rd.choice(L)
7 rd.choices(L, k=n) #n est un entier de votre choix
8 rd.sample(L, n)
```

Exercice 2 **Premières expériences aléatoires** Dans cet exercice, on utilise les fonctions de la bibliothèque `random` découvertes ci-dessus pour simuler des expériences aléatoires. On testera plusieurs fois les fonctions obtenues.

Q1 On dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule verte. Écrire une fonction tirant ne prenant rien en argument et simulant le tirage d'une boule dans l'urne. La fonction renverra "B", "R" ou "V" suivant la couleur de la boule tirée.

Q2 On garde la même urne que dans la question précédente. Écrire une fonction `tirer_sim` prenant en argument un entier n et simulant le tirage simultané de n boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées. Tester votre fonction avec $n = 3$.

Q3 Toujours avec la même urne, écrire une fonction `tirer_suc` prenant en argument un entier n et simulant le tirage successif avec remise de n boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées. Tester votre fonction.

Q4 On lance une pièce équilibrée, de sorte que "Pile" sorte avec probabilité $\frac{1}{2}$ et "Face" avec probabilité $\frac{1}{2}$. Écrire une fonction simulant le lancer de cette pièce et renvoyant son résultat. Tester votre fonction.

Q5 Une pièce est truquée de sorte que “Pile” sorte avec probabilité $\frac{1}{4}$ et “Face” avec probabilité $\frac{3}{4}$. Écrire une fonction simulant le lancer de cette pièce et renvoyant son résultat. Tester votre fonction.

Q6 Même question que précédemment mais lorsque la pièce est truquée de sorte que “Pile” sorte avec probabilité 0, 378 et “Face” avec probabilité 0, 622.

Remarque 1. Si $t = \text{rd.uniform}(0,1)$ est un nombre réel choisi uniformément au hasard entre 0 et 1, quel événement concernant t est de probabilité 0, 378? Plus généralement, quel événement est de probabilité p ?

Q7 Écrire une fonction `alea` prenant en argument un nombre réel $p \in [0, 1]$ et renvoyant 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $1 - p$.

Exercice 3 Répétitions

Q1 Écrire une fonction de simulant le lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Q2 Créez un programme qui simule le lancer de deux dés, fait la somme et affiche le résultat de cette somme.

Q3 On lance le dé N fois et on compte le nombre X de fois où l'on obtient un 6. Écrire une fonction `de2` prenant en argument N et renvoyant X . Testez votre fonction avec $N = 5, 10, 100$.

Q4 On répète cette expérience mais on veut cette-fois calculer la fréquence $\frac{X}{N}$ d'apparition du 6. Modifiez la fonction précédente. Qu'observe-t-on pour N grand?

Exercice 4 Marche aléatoire 1D

Q1 Écrire une fonction `pas` renvoyant 1 avec probabilité 0.15, 2 avec probabilité 0.25, et 3 avec probabilité 0.6.

Q2 Un pion initialement situé à l'origine d'un axe gradué de 1 en 1 se déplace selon la règle suivante : à chaque temps $n \in \mathbb{N}$, il se déplace d'un nombre aléatoire d'unités vers la droite. Ce nombre est égal à 1 dans 15% des cas, à 2 dans 25% des cas, et à 3 dans 60% des cas. Écrire une fonction renvoyant la position du pion après 10 déplacements.

Q3 Estimer la probabilité que le pion soit à la position 25 après 10 coups.

Q4 En moyenne, à quelle position est le pion après 10 coups?

Exercice 5 Toutes les matrices sont inversibles?

Q1 Écrire une fonction `inversible` prenant en argument une matrice carrée de taille 2 et déterminant si celle-ci est inversible.

Q2 Écrire une fonction permettant d'estimer la probabilité qu'une matrice de taille 2 dont les coefficients sont choisis uniformément au hasard dans $[0, 1]$ soit inversible. Êtes-vous surpris du résultat?