# TD$_{20}$ Espaces vectoriels

**Exercice 1**

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $E$.
   (a) $F_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - z + 3t = 0\right\}$ avec $E = \mathbb{R}^4$
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ avec $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriels des polynômes à coefficients réels.
   (c) $F_3 = \left\{f \in E \mid f(0) = 0\right\}$ où $E$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$
   (d) $F_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$, où $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (e) $F_5 = \left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$, où $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $E$ ? Justifier.
   (a) $G_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = x + 2y\right\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
   (b) $G_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 2z + 1 = 0\right\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$
   (c) $G_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ avec $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$
   (d) $G_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\right\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
   (e) $G_5 = \left\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est paire}\right\}$ avec $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

**Exercice 2**

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoiel sous-jacent et en donner une famille génératrice :

1. $F_1 = \left\{(x - y, x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x + 2y, x - z, z + y + 2x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$
3. $F_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\right\}$
4. $F_4 = \left\{\begin{pmatrix} x & x+y \\ -y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$

**Exercice 3**

1. Démontrer que $E = \left\{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid y(2) = y(-1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. On note $f : x \longmapsto x^2 - x$, $g : x \longmapsto \cos((x-2)(x+1))$ et $h : x \longmapsto 7$.
   On note $F = \operatorname{Vect}(f, g, h)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par ces 3 fonctions.
   Démontrer que $F \subset E$.

**Exercice 4 (familles génératrices)**

1. Montrer que $\big((0, 1, 2), (1, 0, 2), (2, 1, 0)\big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(t + s - r, t + r, s) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\}$.
3. Déterminer une famille génératrice de $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = x + y = 0\right\}$.

**Exercice 5 (familles libres)**

1. Montrer que $\big((0,1,2),(1,0,2),(2,1,0)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Montrer que $(A,B,C)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\big((1,3,-1),(2,0,1),(0,6,-3)\big)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 6**

1. Soient $U=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Montrer que $(U,V,W)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
2. Montrer que la famille $\big((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
3. Montrer que la famille $\big((1,i,-i),(i,0,-1),(1,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.

**Exercice 7**

1. Soit $F_1=\{(t+s-r,2t-3s-r,3t-7s-r)\mid t,s,r\in\mathbb{R}\}$.
   (a) Déterminer une famille génératrice de $F_1$.
   (b) Cette famille est-elle une base de $F_1$ ?
   (c) Déterminer une base de $F_1$ formée de vecteurs de cette famille.
2. Mêmes questions avec
   $F_2=\{(2a+b+2d,2a+2b+2c+d,4a-4c+d,2a+b)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$.
3. Mêmes questions avec $F_3=\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ où
   $u_1=(2,-1,-1)$, $u_2=(-1,2,3)$, $u_3=(1,4,7)$ et $u_4=(1,1,2)$.

**Exercice 8**

Soient $E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x-y+z-t=0\right\}$ et $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\mid x=y\right\}$.

1. Déterminer la dimension de $E$.
2. Déterminer la dimension de $F$.
3. Déterminer la dimension de $E\cap F$.

**Exercice 9**

1. Déterminer une base de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille 2).

Dans la suite, on fixe $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Déterminer une base et la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille $n$).
3. Déterminer une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices antisymétriques de taille $n$).

**Exercice 10**
Soient $E = \text{Vect}\big((-1,2,1,0),\ (-1,2,0,1)\big)$ et $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = -2z+t\big\}$.

1. Montrer que $E$ et $F$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de $F$.
3. Quelle est la dimension de $E$ ?
4. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $E$.
5. Soit $G = E \cap F$. Déterminer une base et la dimension de $G$.

**Exercice 11**
On définit les ensembles suivants :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ -2a-c \\ c \end{pmatrix} \ \middle|\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x+y+z+t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $E$ et $F$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $E \subset F$.
3. Que vaut $\dim(E)$ ?
4. En déduire la dimension de $F$.

**Exercice 12**
Soient les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles $(u_1,u_2)$, $(u_2,u_3)$ et $(u_1,u_3)$ sont libres.
2. La famille $(u_1,u_2,u_3)$ est-elle libre ?
3. Quelle propriété fausse cet exercice met-il en lumière ?

**Exercice 13**
On considère l'ensemble $E$ formé des suites réelles vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$, c'est-à-dire que :

$$E = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\right\}.$$

1. Sans donner la forme explicite des éléments de $E$, montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. En donnant la forme explicite des éléments de $E$ (voir le cours sur les suites récurrentes linéaires du début d'année), déterminer une famille génératrice de $E$.
3. Montrer que la famille génératrice trouvée à la question précédente est une base de $E$.
4. Exprimer les coordonnées de tout vecteur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dans cette base. On donnera le résultat en fonction de $u_0$ et de $u_1$.

**Exercice 14**

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où $u_1 = (1,2,2,1),\ u_2 = (5,6,6,5),\ u_3 = (-1,-3,4,0),\ u_4 = (0,4,-3,-1)$.
2. $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où $u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (2,1,2,1),\ u_3 = (1,-1,1,-1),\ u_4 = (0,1,0,1)$.

**Exercice 15**

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $\lambda$ la famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$ ?

1. $(u_1 - \lambda e_1, u_2 - \lambda e_2, u_3 - \lambda e_3)$ où $u_1 = (3,2,-1),\ u_2 = (2,-1,1),\ u_3 = (-4,4,-1)$ et où $(e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. $(u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = (\lambda,1,1),\ u_2 = (1,\lambda,-1),\ u_3 = (1,1,\lambda)$.