Chapitre 21

Géométrie

Sommaire

21.1 Points, vecteurs et produit scalaire

21.1.1 Définitions et opérations

On travaillera dans ce chapitre tantôt dans un plan $\mathscr{P}$, tantôt dans l'espace $\mathscr{E}$. Pour ne pas surcharger on utilisera $\mathscr{A}$ lorsque le résultat désigne indifféremment le plan ou l'espace. On identifiera l'ensemble des vecteurs du plan à $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble des vecteurs de l'espace à $\mathbb{R}^3$.

- On supposera le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans ces conditions un point $M \in \mathscr{P}$ est caractérisé de manière unique par ses coordonnées (x, y) appelées abscisse et ordonnée dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on le notera alors $M(x, y)$. On assimilera alors souvent $\mathscr{P}$ à $\mathbb{R}^2$.
- De même on supposera l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans ces conditions un point $M \in \mathscr{E}$ est caractérisé de manière unique par ses coordonnées (x, y, z) appelées abscisse, ordonnée et côte dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on le notera alors $M(x, y, z)$. On assimilera alors souvent $\mathscr{E}$ à $\mathbb{R}^3$.

Définition 21.1: Vecteur du plan

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de $\mathscr{P}$. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j}$$

On appelle $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On appelle vecteur nul le vecteur $\overrightarrow{0}$ défini par

$$\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j}$$

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Définition 21.2: Vecteur de l'espace

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de $\mathscr{E}$. On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j} + (z_B - z_A)\overrightarrow{k}$$

On appelle $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ et $z_B - z_A$ les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On appelle vecteur nul le vecteur $\overrightarrow{0}$ défini par

$$\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$$

On note $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Propriété 21.1. *Soit A, B et C trois points de $\mathscr{A}$. On a alors*

- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(relation de Chasles)*

Démonstration. En effet, par définition :

- $\overrightarrow{AA} = (x_A - x_A, y_A - y_A) = (0,0) = \overrightarrow{0}$.
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = -(x_A - x_B, y_A - y_B) = -\overrightarrow{BA}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (x_B - x_A, y_B - y_A) + (x_C - x_B, y_C - y_B) = (x_C - x_A, y_C - y_A) = \overrightarrow{AC}$.

□

Définition 21.3. Soit $O \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$. Il existe un unique point $M \in \mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Exemple 21.1. Par exemple si O est le point de coordonnées $(-1, 2)$ et $\overrightarrow{u} = (3, 1)$ alors l'unique point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ est le point de coordonnées $(2, 1)$.

21.1.2 Colinéarité

Définition 21.4: Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires si l'un des deux est le vecteur nul ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.

Définition 21.5: Déterminant de deux vecteurs

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs du plan $\mathscr{P}$. On définit le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y$$

Exemple 21.2. Par exemple,

Propriété 21.2: Propriétés du déterminant

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan $\mathscr{P}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

- $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
- $\det(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mu\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$
- $\det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \mu\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$

Démonstration. Notons $\overrightarrow{u} = (x, y)$, $\overrightarrow{v} = (x', y')$ et $\overrightarrow{w} = (x'', y'')$.

- On a $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y = -(x'y - xy') = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$.
- On a

$$\begin{aligned}\det(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= \det((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y'), (x'', y''))\\ &= (\lambda x + \mu x')y'' - (\lambda y + \mu y')x''\\ &= \lambda(xy'' - yx'') + \mu(x'y'' - y'x'')\\ &= \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mu\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).\end{aligned}$$

- En utilisant les deux points précédents,

$$\det(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = -\det(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = -(\lambda\det(v, u) + \mu\det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})) = \lambda\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \mu\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}).$$

□

Remarque 21.1. Les deux derniers points de la propriété ci-dessus énoncent que le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Théorème 21.1: Caractérisation de la colinéarité par le déterminant

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

Démonstration. Raisonnons par double implication. Notons $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$.

- Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires.

- ⋆ Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul alors $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ d'après la définition du déterminant.

- ⋆ Sinon, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$. On a donc $\overrightarrow{v} = (kx, ky)$ puis $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = kxy - kxy = 0$.

On a bien prouvé que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

- Réciproquement, supposons que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

  - ⋆ Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont bien colinéaires.

  - ⋆ Sinon $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, par exemple $x \neq 0$. Comme $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$, on a $xy' - x'y = 0$ et donc $y' = (x'/x)y$. Notons $k = x'/x$. Alors $x' = kx$ et $y' = ky$, donc $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont bien colinéaires.

On a prouvé que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

□

Exemple 21.3. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2,3)$ et $\overrightarrow{v} = (-4/3, -2)$ sont colinéaires.

21.1.3 Produit scalaire

Définition 21.6: Produit scalaire

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On définit le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ ou bien $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ ou encore $(\overrightarrow{u} | \overrightarrow{v})$ voire $\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{v} \rangle$, par

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = xx' + yy'$$

Dans ce cours on adoptera la notation $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.
Pour $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on définit

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = xx' + yy' + zz'$$

Exemple 21.4.

- Dans $\mathbb{R}^2$, si $\overrightarrow{u} = (2,5)$ et $\overrightarrow{v} = (-1,3)$ alors $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \dots$

- Dans $\mathbb{R}^3$, si $\overrightarrow{u} = (2,5,-1)$ et $\overrightarrow{v} = (-1,3,2)$ alors $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \dots$

Propriété 21.3: Propriétés du produit scalaire

On note $n = 2$ ou 3. Le produit scalaire est

- Bilinéaire : pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, pour tout λ et $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \langle \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}\rangle = \lambda\langle\vec{u}, \vec{w}\rangle + \mu\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle \\ \langle \vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}\rangle = \lambda\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle + \mu\langle\vec{u}, \vec{w}\rangle \end{cases}$$

  En particulier on a
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle\vec{u}, \vec{0}\rangle = \langle\vec{0}, \vec{u}\rangle = 0$$

- Symétrique : pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle$$

- Défini : pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle = 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad \vec{u} = \vec{0}$$

- Positif : pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$
$$\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle \geqslant 0$$

Démonstration. Au tableau. □

Définition 21.7: Norme euclidienne

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). On définit la norme euclidienne de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle}$$

Un vecteur $\vec{u}$ sera dit normé si $\|\vec{u}\| = 1$.

Propriété 21.4.

- *Si $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
- *Si $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.*

Démonstration.

- Si $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Si $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

□

Remarque 21.2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du repère usuel alors $\|\overrightarrow{AB}\|$ mesure la distance (au sens de la distance usuelle) du segment $[AB]$.

Exemple 21.5. Si $\vec{u} = (-1, 2)$ alors $\|\vec{u}\| = \ldots$ et

Propriété 21.5: Propriétés de la norme

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- $\|\lambda \overrightarrow{u}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{u}\|$,
- $\|\overrightarrow{u}\| \geqslant 0$
- $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$,
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.
- On a les identités suivantes, dites de polarisation

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Démonstration. Les trois premiers points découlent aisément de la définition.

De plus,

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= \langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + +\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle
\end{aligned}$$

On en déduit aisément que

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right) &= \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle - \left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{-v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{-v} \rangle\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle - \left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle\right) \\
&= \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle
\end{aligned}$$

□

Théorème 21.2: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). On a alors

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

Démonstration. On définit l'application

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\|^2 \end{array}$$

On a alors
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2t\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle + t^2\|\overrightarrow{v}\|^2$$
P est donc une application polynomiale de degré 2.
De plus, d'après les propriétés de la norme on a
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad P(t) \geqslant 0$$
On peut procéder de deux manières :

- Comme P est de signe constant il ne peut pas admettre deux racines réelles distinctes, son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire
$$\Delta = 4\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle^2 - 4\|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \leqslant 0$$
D'où
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle^2 \leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$$
Par croissance de la fonction racine carrée on a alors
$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$
D'où
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \leqslant |\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$
- Pour $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ le résultat à prouver est $0 \leqslant 0$ et est donc évident. Supposons désormais $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ d'où $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$.
Comme P ne prend que des valeurs positives on a en particulier
$$P\left(-\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\right) \geqslant 0$$
C'est-à-dire
$$\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} - 2\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} + \|\overrightarrow{v}\|^2 \geqslant 0$$
D'où
$$\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \leqslant \|\overrightarrow{v}\|^2$$
Puis
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle^2 \leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2$$
Par croissance de la fonction racine carrée on a alors
$$|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$
Finalement on a bien
$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \leqslant |\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

□

Théorème 21.3: Inégalité triangulaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). On a alors

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \\ &\leqslant \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \\ &\leqslant \left(\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|\right)^2\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 \leqslant \left(\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|\right)^2$$

Par croissance de la fonction racine carrée on a alors

$$\left|\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|\right| \leqslant \left|\|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|\right|$$

C'est-à-dire

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|.$$

□

Définition 21.8: Orthogonalité

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dit orthogonaux si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = 0$

Théorème 21.4: de Pythagore

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Démonstration. Au tableau. Cela découle aisément de la formule

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$$

□

Dans le cas où $\mathscr{A} = \mathbb{R}^2$ muni de son repère usuel ces notions et résultats peuvent s'interpréter en terme d'angle

Propriété 21.6: Calcul du produit scalaire dqns le plan à l'aide du cosinus

Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$

Remarque 21.3. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont alors orthogonaux si et seulement si $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}\right) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}} \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 21.1. On considère trois points du plan $\mathscr{P}$ A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \pi/6$. Calculer $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$.

21.2 Droites et cercles dans le plan

21.2.1 Vecteur directeur, représentation paramétrique

Définition 21.9: Droite du plan

Une partie $\mathscr{D}$ non-vide de $\mathscr{P}$ est appelée une droite s'il existe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tel que

$$\mathscr{D} = \{M \in \mathscr{P} \mid \exists\, t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}\}$$

où A est un point quelconque fixé de $\mathscr{D}$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Remarque 21.4. Une droite admet toujours une infinité de vecteurs directeurs, en effet, si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Plus précisément deux vecteurs sont deux vecteurs directeurs de la même droite si et seulement si ils sont colinéaires.

Propriété 21.7

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan. Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{D}$. Alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Définition 21.10

- Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites sécantes si $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \neq \emptyset$
- Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Propriété 21.8: Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $A \in \mathscr{D}$. Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$.
Alors $M(x, y) \in \mathscr{D}$ si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\overrightarrow{u}} \\ y = y_A + t y_{\overrightarrow{u}} \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathscr{D} = \left\{ (x_A + t x_{\overrightarrow{u}}, y_A + t y_{\overrightarrow{u}}) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

On appelle une telle écriture une *représentation paramétrique de* $\mathscr{D}$.

Remarque 21.5. Une droite admet une infinité de représentations paramétriques. En effet celle-ci dépend du point choisi et du vecteur directeur choisi et on a une infinité de choix pour ces deux éléments.

Moralement une droite est caractérisée de manière unique par la donnée

- d'un point de la droite
- d'un vecteur directeur

Exemple 21.6. Soit D la droite du plan passant par le point A de coordonnées $(2, 3)$ et admettant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$. Alors une représentation paramétrique de D est donnée par

21.2.2 Vecteur normal, équation cartésienne d'une droite

Définition 21.11

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan $\mathscr{P}$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.
On dit que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire, si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
De manière équivalente $\overrightarrow{v}$ est normal à $\mathscr{D}$ si

$$\forall (A, B) \in \mathscr{D}, \quad \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

Remarque 21.6. Une droite admet une infinité de vecteurs normaux, en effet, si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à de $\mathscr{D}$.

Propriété 21.9: Equation cartésienne d'une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan, $A \in \mathscr{D}$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$ de coordonnées (a, b).
Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. Alors

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \text{ si, et seulement si, } ax + by = ax_A + by_A.$$

Notons $c = ax_A + by_A$. On a alors

$$M(x, y) \in \mathscr{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad ax + by = c.$$

L'équation $ax + by = c$ est appelée une *équation cartésienne* de la droite $\mathscr{D}$.

Remarque 21.7. Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes. En effet celle-ci dépend du point choisi et du vecteur normal choisi et on a une infinité de choix pour ces deux éléments.

Une droite $\mathscr{D}$ est ainsi caractérisée de manière unique par la donnée de

- Un point de $\mathscr{D}$,
- Un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Démonstration. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan, $A \in \mathscr{D}$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur normal à $\mathscr{D}$ de coordonnées (a, b). Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. Supposons que $M \in \mathscr{D}$, alors $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$ax + by = ax_A + by_A$$

Réciproquement supposons que $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$. Comme $\overrightarrow{v}$ n'est pas le vecteur nul alors $(a, b) \neq (0, 0)$, pour fixer les idées supposons $a \neq 0$.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(x_{\overrightarrow{u}}, y_{\overrightarrow{u}}$, on ainsi $ax_{\overrightarrow{u}} + by_{\overrightarrow{u}} = 0$, d'où $x_{\overrightarrow{u}} = -\frac{b}{a} y_{\overrightarrow{u}}$. Ceci implique en particulier que $y_{\overrightarrow{u}} \neq 0$.

On a ainsi $(x - x_A) = -\frac{b}{a}(y - y_A) = \frac{x_{\overrightarrow{u}}}{y_{\overrightarrow{u}}}(y - y_A)$. Notons $t = \frac{y - y_A}{y_{\overrightarrow{u}}}$, On a alors

$$x = x_A + t x_{\overrightarrow{u}}, \qquad y = y_A + t y_{\overrightarrow{u}}$$

C'est-à-dire $M \in \mathscr{D}$. □

Définition 21.12

Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by = c$. Si $a \neq 0$ on peut mettre cette équation sous la forme

$$y = \rho x + d$$

On appelle alors ρ le coefficient directeur ou la pente de $\mathscr{D}$ et d l'ordonnée à l'origine de $\mathscr{D}$.

Remarque 21.8. Si $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ dirige $\mathscr{D}$ et $\alpha \neq 0$ alors $\frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$.

Exercice 21.2. Soit $A(2, 4)$ et $B(-1, 5)$

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB). La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ est normal à la droite (AB). La droite (AB) admet donc une équation cartésienne de la forme $x + 3y = c$. Il nous reste à déterminer c. On sait que $A \in (AB)$, ainsi $x_A + 3y_A = c$, c'est-à-dire $c = 14$. Finalement (AB) admet pour équation cartésienne l'équation $x + 3y = 14$.
2. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la médiatrice du segment $[AB]$ La médiatrice M du segment $[AB]$ est perpendiculaire à (AB). Ainsi $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à M. M admet alors une équation cartésienne de la forme $-3x + y = c'$. Pour déterminer c' il nous faut un point de M. Le milieu $I\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ de $[AB]$ appartient à M. Ainsi $c = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 3$ M admet donc pour équation cartésienne l'équation $-3x + y = 3$. Un vecteur directeur de M est le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$. On en déduit une représentation paramétrique de M

$$M = \left\{ \left(-\frac{1}{2} + t, \frac{9}{2} + 3t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

21.2.3 Cercles

Définition 21.13

Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $r > 0$. On appelle cercle de centre Ω et de rayon r, l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ sis à une distance égale à R du point Ω. C'est-à-dire

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} \mid \|\overrightarrow{\Omega M}\| = R\}$$

Théorème 21.5: Équation cartésienne d'un cercle

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega) \in \mathscr{P}$ et $R > 0$.
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

On appelle l'équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

Démonstration. Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = \langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M} \rangle = (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2$$

Ainsi, on a

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\| = R \underset{\text{Car } R \geqslant 0 \text{ et } \|\overrightarrow{\Omega M}\| \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

□

Remarque 21.9. Une équation de cercle est donc de la forme $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.

En développant on aboutit à une équation de la forme $x^2 + 2x_\Omega x + y^2 + 2y_\Omega y = R^2 - x_\Omega^2 - y_\Omega^2$, c'est-à-dire de la forme $x^2 + ax + y^2 + by = \rho$ avec $(a, b, \rho) \in \mathbb{R}^3$.

Face à une équation de la forme $x^2 + ax + y^2 + bx = \rho$ on va utiliser la mise sous forme canonique pour revenir à une équation de cercle plus lisible.

Exemple 21.7. Caractériser les figures géométriques caractérisées par les équations cartésiennes suivantes :

- $E_1 : x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0.$
- $E_2 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$
- $E_3 : x^2 - 6x + y^2 - 2y + 12 = 0$

Propriété 21.10: Aire et périmètre du cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon $R \geqslant 0$ et $\mathscr{D}$ le disque associé. L'aire de $\mathscr{D}$ vaut πR^2 et le périmètre de $\mathscr{C}$ vaut $2\pi R$.

21.3 Droites et plans de l'espace

21.3.1 Droites de l'espace

Comme dans le plan une droite de l'espace est définie par

- Un point de la droite
- Un vecteur directeur

Définition 21.14

Une partie $\mathscr{D}$ non-vide de $\mathscr{E}$ est appelée une droite s'il existe $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tel que

$$\mathscr{D} = \{M \in \mathscr{E} \mid \exists\, t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}\}$$

où A est un point quelconque fixé de $\mathscr{D}$.
On dit alors que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Remarque 21.10. De manière similaire au cas du plan on dira que deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, par contre l'orthogonalité des vecteurs directeurs ne nous dit rien.

Propriété 21.11: Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ et soit $\overrightarrow{u} = (x_{\overrightarrow{u}}, y_{\overrightarrow{u}}, z_{\overrightarrow{u}})$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{D}$.
Alors on a

$$\mathscr{D} = \left\{(x_A + x_{\overrightarrow{u}}\, t, y_A + y_{\overrightarrow{u}}\, t, z_A + z_{\overrightarrow{u}}\, t) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

On appelle une telle écriture une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.

21.3.2 Plans de l'espace

Définition 21.15

Une partie $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{E}$ est un plan s'il existe deux vecteurs non-colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et un point $A \in \mathscr{Q}$ tels que

$$\mathscr{Q} = \{M \in \mathscr{E} \mid \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,,\ \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}\}$$

On dit alors que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base du plan $\mathscr{Q}$

Remarque 21.11.

- Un plan admet une infinité de bases.
- Soit A, B et C trois points non-alignés de $\mathscr{E}$, il existe un unique plan contenant A, B et C, on le note (ABC). On peut l'écrire, par exemple

$$(ABC) = \{M \in \mathscr{E} \mid \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \,,\ \overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}\}$$

- En particulier, si $\mathscr{Q}$ est un plan et A, B et C sont trois points non-alignés de $\mathscr{Q}$ alors $\mathscr{Q} = (ABC)$ et donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathscr{Q}$.

Propriété 21.12: Représentation paramétrique d'un plan

Soit $\mathscr{Q}$ un plan et soit $\overrightarrow{u} = x_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{j} + z_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{i} + y_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{j} + z_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{k}$ une base de $\mathscr{Q}$, soit $A \in \mathscr{Q}$. Alors

$$\mathscr{Q} = \left\{(x_A + sx_{\overrightarrow{u}} + tx_{\overrightarrow{v}}, y_A + sy_{\overrightarrow{u}} + ty_{\overrightarrow{v}}, z_A + sz_{\overrightarrow{u}} + tz_{\overrightarrow{v}}) \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On appelle une telle écriture une représentation paramétrique de $\mathscr{Q}$.

Remarque 21.12. Un plan est caractérisé de manière unique par la donnée de

- Un point du plan
- Une base (deux vecteurs non-colinéaires) du plan

ou encore par la donnée de

- Trois points du plan (non alignés)

Exemple 21.8. Dans l'espace $\mathscr{E}$ on considère les trois points $A(0,1,2)$, $B(2,3,0)$ et $C(-1,2,1)$.

1. Montrer que ces trois points définissent un plan de l'espace.
2. Déterminer une représentation paramétrique de ce plan.

21.3.3 Équations cartésiennes

Définition 21.16

Soit $\mathscr{Q}$ un plan de l'espace, un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit normal à $\mathscr{Q}$ si

$$\forall (A,B) \in \mathscr{Q}^2 \qquad \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n} \rangle = 0$$

Remarque 21.13. Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathscr{Q}$ alors $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathscr{Q}$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle = 0$.

Propriété 21.13

Soit $\mathscr{Q}$ un plan de $\mathscr{E}$, soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{Q}$ et $A \in \mathscr{Q}$. Soit $M \in \mathscr{E}$, alors

$$M \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = 0$$

Propriété 21.14

Soit $\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et soit $A \in \mathscr{E}$, l'ensemble $\{M \in \mathscr{E} \mid \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{w} \rangle = 0\}$ est un plan.

Remarque 21.14. Un plan est ainsi caractérisé de manière unique par la donnée de

- Un point du plan,
- Un vecteur normal au plan

Définition 21.17

Deux plans sont dits parallèles s'il existe un vecteur $\overrightarrow{w}$ normal aux deux plans.

Propriété 21.15: Équation cartésienne d'un plan

Soit $\mathscr{Q}$ un plan, $A \in \mathscr{Q}$ et $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ un vecteur normal à $\mathscr{Q}$.
On appelle équation cartésienne de $\mathscr{Q}$ une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où $d = ax_A + by_A + cz_A$. On a alors

$$\mathscr{Q} = \{M(x, y, z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz = d\}$$

Réciproquement une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ définit un unique plan dont $\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal.

Démonstration. Il nous faut prouver que

$$\mathscr{Q} = \{M(x, y, z) \in \mathscr{E} \mid ax + by + cz = d\}$$

Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{Q} &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = ax_A + by_A + cz_A \end{aligned}$$

□

Propriété 21.16

Soit $\mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$ deux plans non-parallèles de $\mathscr{E}$ d'équations cartésiennes respectives

$$ax + by + cz = d \qquad \text{et} \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

L'intersection de $\mathscr{Q}_1$ et $\mathscr{Q}_2$ est une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$.
On appelle équation cartésienne de $\mathscr{D}$ le système d'équation

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{cases}$$

On peut obtenir un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ en cherchant un vecteur orthogonal à $a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ et à $\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$.

Remarque 21.15. On rappelle les propriétés suivantes du cours de géométrie de lycée :

- Deux droites de $\mathscr{E}$ peuvent être
  - sécantes
  - parallèles, dans ces deux cas elles sont dites coplanaires
  - non-coplanaires
  - confondues
- Une droite $\mathscr{D}$ et un plan $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{E}$ peuvent
  - être parallèles
  - vérifier $\mathscr{D} \subset \mathscr{Q}$
  - être sécants
- Deux plans peuvent être
  - sécants
  - parallèles
  - confondus

Exercice 21.3. Soient $A(4,2,-1); B(1,3,1) et C(-3,0,3)$ trois points de l'espace.

1. Démontrer que A, B et C déterminent un plan de l'espace.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

21.4 Projection orthogonale, distance à une droite ou un plan

Théorème 21.6

Soit $M \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{F}$ une droite ou un plan.
Il existe un unique point $H \in \mathscr{F}$ tel que

$$\forall B \in \mathscr{F}, \qquad \langle \overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HB} \rangle = 0$$

On appelle ce point le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$.

Définition 21.18

Soit $M \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{F}$ une droite ou un plan. On définit la distance de M à $\mathscr{F}$, notée $d(M,\mathscr{F})$ par

$$d(M,\mathscr{F}) = \inf_{N\in\mathscr{F}} \|\overrightarrow{MN}\|$$

Il s'agit donc de la borne inférieure des distances entre M et un point de $\mathscr{F}$.

Théorème 21.7

Soit $M \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{F}$ une droite ou un plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$.
Le projeté orthogonal H de M sur $\mathscr{F}$ est l'unique point qui réalise la distance de M à $\mathscr{F}$, c'est-à-dire

$$d(M,\mathscr{F}) = \|\overrightarrow{MH}\|$$

Remarque 21.16. Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$ est ainsi le point de $\mathscr{F}$ le plus proche de M.

Démonstration. Commençons par remarquer que, comme $H \in \mathscr{F}$ alors

$$d(M,\mathscr{F}) = \inf_{N\in\mathscr{F}} \|\overrightarrow{MN}\| \leqslant \|\overrightarrow{MH}\|$$

Soit $N \in \mathscr{F}$. On a

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{MN}\|^2 &= \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HN}\|^2 \\ &= \|MH\|^2 + 2\langle\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{HN}\rangle + \|\overrightarrow{HN}\|^2 \\ &= \|MH\|^2 + \|\overrightarrow{HN}\|^2\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall N \in \mathscr{F}, \qquad \|\overrightarrow{MN}\| \geqslant \|\overrightarrow{MH}\|$$

D'où

$$d(M,\mathscr{F}) = \inf_{N\in\mathscr{F}} \|\overrightarrow{MN}\| \geqslant \|\overrightarrow{MH}\|$$

Finalement on a bien

$$d(M,\mathscr{F}) = \|\overrightarrow{MH}\|$$

On peut aussi remarquer que, si $N \neq H$ alors $\|\overrightarrow{MN}\| > \|\overrightarrow{MH}\|$, ainsi,

$$\forall N \in \mathscr{F} \setminus \{H\}, \qquad \|MN\| > d(M,\mathscr{F})$$

H est donc bien l'unique point réalisant la distance de M à $\mathscr{F}$. □

Comment déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan? C'est en fait assez simple :

Propriété 21.17

Soit $M \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{F}$ une droite ou un plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$.
H est l'intersection de $\mathscr{F}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathscr{F}$ passant par M.

Démonstration.

$$\forall B \in \mathscr{F}, \qquad \langle \overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HB} \rangle = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{HM}$ est un vecteur normal à $\mathscr{F}$.

La droite (HM) est ainsi la perpendiculaire à $\mathscr{F}$ passant par M et on a bien $\{H\} = (HM) \cap \mathscr{F}$. □

Exercice 21.4. Déterminer le projeté orthogonal de $M(1,1,1)$ sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 2z = 0$ et la distance de M à $\mathscr{P}$

Le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

La droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A admet donc $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur et a ainsi pour représentation paramétrique

$$\mathscr{D} = \{M(1+t, 1-t, 1+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Déterminons l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$

$$\begin{aligned} M(1+t, 1-t, 1+2t) \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow (1+t) - (1-t) + 2(1+2t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 6t = 0 \\ . &\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ est le point $H\left(1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{2}{3}\right) = H\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

La distance entre A et $\mathscr{P}$ vaut

$$\|AH\| = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$