TD₂₁ Géométrie

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (resp. $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$).

Exercice 1

Soient A, B, C trois points quelconques de l'espace. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$. On introduit G le centre de gravité de ABC , défini par la relation $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

1. Simplifier les sommes suivantes :

$$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BC} \qquad \vec{GJ} + \vec{GB} + \vec{GC} \qquad 2\vec{GJ} + \vec{GA}$$

2. Compléter les égalités suivantes :

$$\vec{AJ} = \dots \vec{AB} + \dots \vec{AC} \qquad \vec{AG} = \dots \vec{AB} + \dots \vec{AC}$$

Exercice 2

Dans le plan, on note $A(0, 1)$ et $B(2, 3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2. Faire une figure.

Exercice 3

Dans l'espace on note : $A(0, 1, 2)$, $B(2, 3, 0)$ et $C(-1, 2, 1)$.

1. Montrer que ces trois points définissent un plan (ABC) .
2. Déterminer une équation cartésienne de ce plan.
3. Quel est l'ensemble $\{M(1, a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$?
4. Déterminer le réel a pour lequel le point $M(1, a, 2a)$ appartienne au plan (ABC) .
5. Représenter tous les éléments de cet exercice. (*Essayer d'abord seul, puis aidez-vous de Geogebra*)

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations et systèmes d'équations suivants :

(On fera une interprétation géométrique du résultat) :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \qquad (\Sigma_2) : \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{2} \\ 2x - y = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad (\Sigma_3) : \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -\frac{1}{2} \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$(E_1) : x + y + 2 = 0$$

$$(E_2) : x + y = 2y + x - 1$$

$$(E_3) : 3x - 2y = 1$$

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les équations et systèmes d'équations suivants :

(On fera une interprétation géométrique du résultat) :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} 2x - y - z = -1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \qquad (\Sigma_2) : \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z = -\frac{1}{2} \\ 2x - 4y + 4z = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad (\Sigma_3) : \begin{cases} \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ -2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$(E_1) : x + y + z + 2 = 0$$

$$(E_2) : x + y = 1$$

$$(E_3) : 3x - 2y + 4z = 0$$

Exercice 6

On note Π le plan de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t + 2t' \\ y = 0 + t - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases} \quad ((t, t') \in \mathbb{R}^2)$$

Déterminer une équation cartésienne de Π .

Exercice 7

Montrer que le système $\begin{cases} 2x + 7y + 3z = -10 \\ 4x + 5y + 2z = -2 \end{cases}$ définit une droite Δ de l'espace.

Déterminer une représentation paramétrique de Δ .

Exercice 8

Dans l'espace, on note $A(2; -1; 5)$ et $B(-1; 2; 3)$,

Étudier l'intersection de (AB) avec le plan Π d'équation : $5x - 3y - z = 1$

Exercice 9

On note A le point de l'espace de coordonnées $(-1; 2; 3)$, $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(1; 3; 4)$ et $\vec{v}(3; 0; -2)$.

On note Π le plan de repère $(A; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Donner une représentation paramétrique de Π .
2. Déterminer une équation cartésienne de Π .

Exercice 10

On considère les droites $\Delta_1 : 3x + 2y = 0$ et $\Delta_2 : 2x - 3y = 1$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(3, 4)$.

Déterminer $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les projetés respectifs de $\vec{v}$ sur Δ_1 et Δ_2 .

Exercice 11

On considère dans le plan les points $A(1, 2)$ et $B(2, 0)$. Donner une équation de la médiatrice de $[AB]$ et tracer les éléments de l'exercice.

Exercice 12

On note P le plan d'équation $3x - 2y = 0$ et A le point de coordonnées $(3, 2, 2)$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à P .
2. Faire une figure. (*Essayer d'abord seul, puis aidez-vous de Geogebra*)