TD$_{25}$ Intégration des fonctions réelles

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes.

1. Par primitivation directe :
   - $\displaystyle\int_1^2 e^{-3x}\,dx$,
   - $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$,
   - $\displaystyle\int_{-\ln(\pi)}^{\ln(2\pi)} e^x\cos(e^x)\,dx$,
   - $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.
2. Par intégration par parties :
   - $\displaystyle\int_0^1 te^t\,dt$,
   - $\displaystyle\int_0^1 t^2e^{3t}\,dt$,
   - $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)\,dx$,
   - $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$.
3. Par changement de variables :
   - $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ (en utilisant $u=\sqrt{t}$),
   - $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$ (en utilisant $u=e^t$).

Exercice 2
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. On souhaite montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

1. Faire un schéma illustrant l'égalité ci-dessus.
2. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $G(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G'.
3. Conclure.

Exercice 3
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $a>0$.

1. Si f est impaire, montrer que
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$
2. Si f est paire, montrer que
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$$

Exercice 4
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n\,dx.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (I_n) et en déduire qu'elle converge vers un réel $l\in\mathbb{R}$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer I_n+I_{n+2} et en déduire la valeur de l.

Exercice 5
Soit

$$\varphi : x\mapsto \int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt.$$

1. Justifier que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et calculer $\varphi'(x)$.
2. En déduire la valeur de $\varphi(x)$ pour tout $x>0$.