

TD₂₆ Equations différentielles

Exercice 1 (•••)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 5y = x$. On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} y' + 5y = x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 (•••)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 3y' + 2y = \cos(3x)$,
Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = a \cos(3x) + b \sin(3x)$,
2. (a) $y'' - 2y' + y = x + 3$
Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax + b$,
(b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = 5$ et $f'(0) = 2$.
3. $y'' - 4y' + 5y = e^x$
Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = (ax + b)e^x$
4. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$,
Indication : chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = ax^2 + bx + c$,

Exercice 3 (•••)

Résoudre les équations différentielles suivantes en appliquant la méthode de la variation de la constante :

1. $y' + 2y = e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(1) = 2$.
2. $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$ sur $\mathbb{R}$,
3. $y' = \frac{y}{x} + x$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
4. $y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec $y(1) = 1$.

Exercice 4 (•••)

Résoudre le système différentiel suivant sur $\mathbb{R}$ (on raisonnera par analyse-synthèse)

$$\begin{cases} x'(t) - y(t) = 0, \\ x(t) - y'(t) = 0. \end{cases}$$

Exercice 5 (•••)

Dans cet exercice, on cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y). \quad (\mathcal{E}_1)$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction f .
2. *Analyse.* On considère maintenant une fonction f solution de $(\mathcal{E}_1)$. En dérivant la relation $(\mathcal{E}_1)$ par rapport à x , déduire que f vérifie une équation différentielle du type

$$y'(t) = ay(t)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante à exprimer en fonction de f .

3. Résoudre cette dernière équation différentielle.

4. *Synthèse*. Toutes les fonctions trouvées sont-elles solutions de $(\mathcal{E}_1)$? Conclure.

Exercice 6 (•••)

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) - 3x y'(x) + 4y(x) = 0. \quad (\mathcal{E}_2)$$

1. Cette équation différentielle rentre-t-elle dans le cadre du cours?

2. *Analyse*. Considérons y une éventuelle solution de $(\mathcal{E}_2)$. On définit $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t).$$

(a) Montrer que z est deux fois dérivable et calculer z' et z'' en fonction de y' et y'' .

(b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.

(c) Résoudre cette équation.

(d) En déduire y .

3. *Synthèse*. Les fonctions trouvées précédemment sont-elles toutes solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_2)$? Conclure.

Exercice 7 (•••)

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation différentielle

$$xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = 0. \quad (\mathcal{E})$$

Résoudre cette équation en s'inspirant de l'exercice précédent et en effectuant le changement de fonction inconnue

$$z : x \mapsto xy(x).$$