

TD₂₄ Dérivation

1 Dérivée d'une fonction, caractère C^1

Exercice 1 (•••)

En utilisant la définition de nombre dérivé et en faisant apparaître un taux d'accroissement, calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos(x)} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2 (•••)

On considère la fonction $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe C^0 mais pas de classe C^1 sur \mathbb{R} .
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 3 (•••)

On considère la fonction $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x < 0, \\ e^x & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe C^1 mais pas de classe C^2 sur \mathbb{R} .
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 4 (••• (extrait d'oral Agro-Veto))

On considère la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Remarque 1 On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Exercice 5 (•••)

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0? de classe C^1 ?

$$1. x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

$$2. x \mapsto x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 6 (•••)

Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle dérivable sur cet ensemble?
2. Calculer f' .
3. Qu'en déduire sur f ?
4. Vérifiez vos résultats en tracant la courbe représentative de f (avec une calculatrice, Geogebra ou Python).

2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Exercice 7 (•••)

Soit P le polynôme définie par

$$P(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2.$$

Montrer que P' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 8 (•••)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{1 + \cos^2(x)}$$

Montrer que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Exercice 9 (•••)

En utilisant le théorème des accroissements finis avec une fonction bien choisie, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

1. $\sqrt{10001} \approx 100$

2. $\frac{1}{0.999^2} \approx 1$

3. $\cos(1) \approx \frac{1}{2}$.

Exercice 10 (••• Extrait du concours ENS - BCPST 2024)

Soient a_0, a_1, a_2 trois nombres réels et Q le polynôme de degré 3 défini par

$$Q(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

1. Justifier que Q possède au moins une racine réelle.

On suppose désormais que Q possède 3 racines réelles notées z_1, z_2 et z_3 , telles que $z_1 \geq z_2 \geq z_3$.

2. Montrer que Q' admet deux racines réelles y_1 et y_2 telles que $z_1 \geq y_1 \geq z_2 \geq y_2 \geq z_3$.

3. Montrer que $a_2^2 \geq 3a_1$.

3 Étude de suites récurrentes

Exercice 11 (•••)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

2. Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, 1]$, notée α .

3. Utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \sin(1)^n.$$

4. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 12 (•••)

Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 2]$.

2. Si (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, quelles sont les valeurs possibles pour l ?

3. Montrer que pour tout $x, y \in [1, 2]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

4. En déduire la convergence de la suite (u_n) .