Chapitre 26

Équations différentielles linéaires : partie 2

Sommaire

26.1 Motivations

Les équations différentielles sont un outil fondamental en sciences dès que l'on cherche à modéliser des phénomènes évoluant dans le temps selon des lois données, que ce soit en physique, en chimie, en écologie voire en économie. On va donner plusieurs exemples de situations faisant intervenir des équations différentielles.

Exemple 26.1.

1. *Cinétique d'une réaction chimique*

   Considérons un système réactionnel fermé, de volume V constant, constitué d'un certain nombre d'espèces physicochimiques $A, B, C, \ldots$; on note $[A](t)$ (resp. $[B](t)$, etc) la concentration en espèce A. Une réaction d'ordre 1 est une réaction de la forme :

   $$\alpha A \to \varphi F + \gamma G + \cdots$$

   Dans ce cas la concentration de A varie au cours du temps et sa vitesse de variation est proportionnelle à la quantité d'espèce A encore présente : Plus il y a d'espèce A, i.e. plus $[A](t)$ est grand, plus $[A](t)$ décroit rapidement, i.e. $[A]'(t)$ est un grand nombre négatif.
   Plus précisément la concentration $[A]$ de A vérifie l'équation différentielle :

   $$[A]'(t) = -\alpha k [A](t)$$

   où k est la constante de vitesse de la réaction, qui ne dépend que de la température. Les réactions d'ordre 1 sont notamment des réactions comportant un seul réactif (qui subit une décomposition, une isomérisation ...), ou dans lesquelles un soluté réagit avec le solvant.

- Décomposition du peroxyde d'hydrogène : $2H_2O_{2(aq)} = 2H_2O_{(l)} + O_{2(g)}$
- Décomposition du pentoxyde d'azote gazeux : $2N_2O_{5(g)} = 4NO_{2(g)} + O_{2(g)}$
- Isomérisation du cyclopropane en propène : $(CH_2)_3 = CH_3 - CH = CH_2$

2. *Masse reliée à un ressort (Oscillateur harmonique linéaire)* On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on se donne un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0. On attache une extrémité de ce ressort à un repère fixe d'abscisse 0 et l'autre extrémité à une masse m qui repose sur le sol. La masse est alors soumise à la tension du ressort, à la gravité et à la réaction du

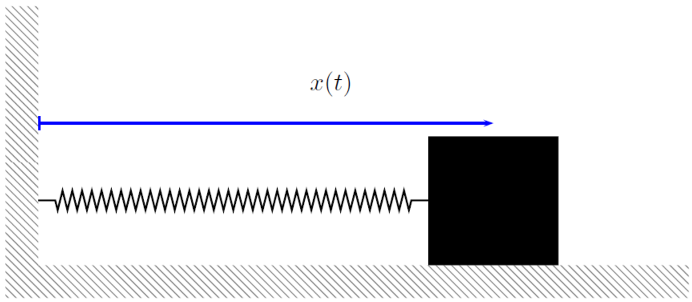

FIGURE 26.1 – La force de rappel s'exerçant sur un ressort

sol. On suppose que les frottements sont négligeables. Quand la masse se trouve à une distance $x(t)$ du repère fixe vertical elle subit alors une force de rappel

$$\vec{F} = -k(x(t) - l_0)\vec{u}$$

Le principe fondamental de la dynamique nous dit alors que

$$mx''(t) = -k(x(t) - l_0)$$

3. *Circuit RLC*
On s'intéresse au montage suivant :

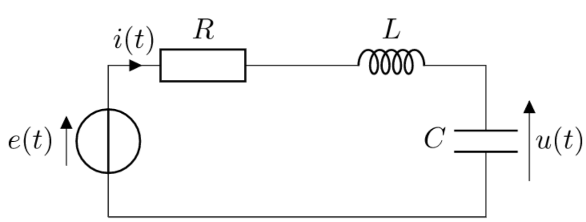

FIGURE 26.2 – Un circuit RLC monté en série

On rappelle que :

- L'intensité $i(t)$ du courant à travers le condensateur vérifie

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad i(t) = Cu_C'(t)$$

où $u_C(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

- La tension $u(t)$ aux bornes de la bobine idéale vérifie

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad u_L(t) = Li'(t)$$

où $i(t)$ est l'intensité du courant traversant la bobine.

- La tension aux bornes de la résistance s'écrit

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad u_R(t) = Ri(t)$$

Le générateur applique au circuit une tension $e(t)$. Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur, $u_C(t)$ vérifie alors l'équation différentielle

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad u_C(t) + RCu_C'(t) + LCu_C''(t) = e(t)$$

4. *Modèles de populations*

Depuis longtemps les scientifiques ont cherché à comprendre et prédire les évolutions dans la taille et la composition des populations humaines et animales.

Historiquement Malthus fut un des précurseur de ce que l'on appelle aujourd'hui l'écologie en modélisant l'évolution de la population humaine $x(t)$ par l'équation différentielle

$$x'(t) = ax(t)$$

où a est un taux mixte de natalité/mortalité. Par la suite Verhulst a amélioré ce modèle en considérant que les ressources naturelles sont limités, ce qui l'a mené à l'équation différentielle

$$x'(t) = ax(t)(K - x(t))$$

Il y a bien d'autres modèles de population (et la recherche continue) sur lesquels on reviendra plus en détail plus tard dans l'année.

Dans ce chapitre on s'intéressera uniquement aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. On pourra relire avantageusement la partie 1 de ce cours qui concerne le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants.

Exercice 26.1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes (pensez à vérifier vos résultats !)

1. $y' = 4y$,
2. $y' + 4y = 3$,
3. $3y' + 5y = 2$.

Exercice 26.2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes

1. $y'' - 9y = -18$,
2. $y'' + 4y' + 4y = 8$,
3. (oscillateur harmonique) $y'' + \omega^2 y = 1$ (où ω est un réel fixé).

26.2 Équations différentielles d'ordre 1, cas général

On étudie maintenant les équations différentielles de la forme

$$y' + a(t)y = b(t), \tag{$\mathscr{E}$}$$

où a et b sont des fonctions continues, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On cherche donc les fonctions y dérivables telles que

$$\forall\, t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

L'équation homogène associée est

$$y' + a(t)y = 0. \tag{$\mathscr{H}$}$$

Méthode 26.1: Résolution d'une EDL d'ordre 1

La résolution de $(\mathscr{E})$ suit les mêmes principes que dans le cas où des coefficients constants :

1. On détermine les solutions de l'équation homogène $(\mathscr{H})$.
2. On détermine une solution particulière de $(\mathscr{E})$.
3. Les solutions de $(\mathscr{E})$ s'obtiennent comme somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
4. Si une condition initiale de type $y(t_0) = y_0$ est donnée, on l'utilise pour déterminer le paramètre C dont dépendent les solutions trouvées.

Attention ! la détermination des solutions de l'équation homogène et (surtout) d'une solution particulière est plus délicate que dans le cas des coefficients constants.

26.2.1 Solutions de l'équation homogène

Théorème 26.1: Solutions de l'équation homogène

On note A une primitive de a sur l'intervalle I. Les solutions de l'équation $(\mathscr{H})$ sont les fonctions de la forme

$$t \longmapsto Ce^{-A(t)},$$

où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque 26.1. Si a est une constante, une primitive est donnée par $A(t) = at$ et on retrouve la même formule que dans le cas des coefficients constants.

26.2.2 Recherche d'une solution particulière

On décrit la méthode de la *variation de la constante*. Cette méthode fonctionne toujours mais il y a souvent plus rapide : on décrira d'autres méthodes de résolution dans la dernière partie.

On cherche les solutions de $(\mathscr{E})$ $y' + a(t)y = b(t)$. On connait les solutions de l'équation homogène $(\mathscr{H})$: les fonctions de la forme

$$t \longmapsto Ce^{-A(t)},$$

où A est une primitve de a. On cherche maintenant une solution particulière de $(\mathscr{E})$.

Méthode 26.2: Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sous la forme $y(t) = C(t)e^{-A(t)}$, où C est une fonction dérivable inconnue. La constante C est donc devenue une fonction *variable*, d'où le nom de la méthode. On calcule :

$$y'(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)A'(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)}\big(C'(t) - C(t)a(t)\big).$$

D'où

$$y'(t) + a(t)y(t) = e^{-A(t)}\big(C'(t) - C(t)a(t)\big) + a(t)C(t)e^{-A(t)} = C'(t)e^{-A(t)}.$$

Ainsi, y est solution de (E) ssi $C'(t)e^{-A(t)} = b(t)$, c'est-à-dire ssi

$$C(t) \text{ est une primitive de } b(t)e^{A(t)}.$$

On est donc ramené à un calcul de primitive.

Remarque 26.2. Le calcul est à refaire à chaque fois; on n'attend pas une connaissance par cœur du résultat.

Exercice 26.3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x} \qquad (\mathscr{E})$$

Exercice 26.4. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \qquad (\mathscr{E})$$

Exercice 26.5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y' + \frac{3}{t^2}y = \exp\Big(\frac{3}{t}\Big). \qquad (\mathscr{E})$$

Exercice 26.6. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y' - \frac{2}{t^3}y = \frac{1}{t}\exp\Big(-\frac{1}{t^2}\Big). \qquad (\mathscr{E})$$

26.3 Recherche de solutions particulières - équations spécifiques (Hors programme)

La méthode de la variation de la constante peut être lourde à mettre en œuvre. Pour certains types d'équations, on peut deviner la forme d'une solution particulière; on présente quelques unes de ces situations.

26.3.1 Solutions évidentes

Si on constate qu'une fonction simple est solution, il n'y a pas besoin d'aller plus loin. En pratique, si on a une équation de la forme

$$y' + a(t)y = b(t)$$

et si les fonctions a et b sont proportionnelles, on a une solution constante (et il serait dommage de perdre du temps à trouver cette solution par variation de la constante).

Exercice 26.7. Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$(E)\ y' + ty = 2t.$$

Résolution. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto C\exp(-t^2/2),$$

avec C une constante réelle.

De plus, la fonction constante égale à 2 est une solution particulière de l'équation.

Donc, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto 2 + C\exp(-t^2/2).$$

26.3.2 Ordre 1 - coefficients constants - second membre $P(t)e^{\gamma t}$

On considère une équation de la forme

$$(E)\ y' + ay = P(t)e^{\gamma t},$$

où $a \in \mathbb{R}$, P est un polynôme et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Propriété 26.1. *L'équation (E) admet une solution particulière de la forme*

- $t \mapsto Q(t)e^{\gamma t}$ *si* $\gamma \neq -a$ *;*
- $t \mapsto tQ(t)e^{\gamma t}$ *si* $\gamma = -a$*,*

Q étant un polynôme de même degré que P.

Remarque 26.3. Bien noter les cas particulier suivants :

- $\gamma = 0$: le second membre est polynomial
- $P = 1$: le second membre est en $e^{\gamma t}$.

Exercice 26.8. Donner une solution particulière de

$$y' - 3y = te^{2t}.$$

Résolution. On cherche une solution sous la forme $y(t) = P(t)e^{2t}$ où $P(t) = at + b$ est un polynôme de degré 1. On calcule :

$$y'(t) - 3y(t) = P'(t)e^{2t} + 2P(t)e^{2t} - 3P(t)e^{2t} = (a - at - b)e^{2t}.$$

On veut $a - at - b = t$ (pour tout t). Il suffit d'avoir $a = -1$ et $a - b = 0$. Donc une solution est

$$y(t) = -(1+t)e^{2t}.$$

Exercice 26.9. Donner une solution particulière de

$$y' + 2y = e^{-2t}.$$

Résolution. On cherche une solution sous la forme $y(t) = ate^{-2t}$, où $a \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$y'(t) + 2y(t) = ae^{-2t} - 2ate^{-2t} + 2ate^{-2t} = ae^{-2t}.$$

Ainsi $a = 1$ convient et une solution est

$$y(t) = te^{-2t}.$$