Chapitre 25

Intégration d'une fonction continue sur un segment

Sommaire

25.1 Primitive d'une fonction continue

25.1.1 Définition, existence

Définition 25.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque 25.1. Lorsqu'elle existe, cette primitive n'est pas unique.

Propriété 25.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, F une primitive de f sur I. L'ensemble des primitives de f sur I est alors

$$\{F + K \ , \ K \in \mathbb{R}\}$$

Remarque 25.2. Il est important de travailler sur un intervalle. Le résultat n'est plus vrai sinon.

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Les fonctions $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(|x|) \end{array}$ et $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) + 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

sont deux primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ mais $G - F$ n'est pas une fonction constante.

Le principal résultat d'existence de primitives est le suivant

Théorème 25.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Remarque 25.3. Dans la plupart des cas on ne peut pas exprimer cette primitive à l'aide des fonctions usuelles.

On peut raffiner un peu ce résultat

Propriété 25.2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $x_0 \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = \lambda$.

25.1.2 Primitives usuelles

Fonction	Intervalle	Primitive
$x \mapsto \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto a^x,\ a > 0$ et $a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\ln(a)}$
$x \mapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto x\ln(x) - x$
$x \mapsto x^a,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ ou $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$

25.1.3 Primitives des fonctions composées usuelles

Ci-dessous, u désigne une fonction dérivable et dont la dérivée est continue sur un intervalle $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$. Pour chaque ligne du tableau, la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I (l'intervalle I doit vérifier les conditions spécifiées).

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$n\, u'\, u^{n-1}\ (n \in \mathbb{N}^\star)$	$\mathscr{D}$	u^n
$-\dfrac{u'}{u^2}$	$I \subset \mathscr{D}$ et $u \neq 0$ sur I	$\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$I \subset \mathscr{D}$ et $u > 0$ sur I	$\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$I \subset \mathscr{D}$ et $u \neq 0$ sur I	$\ln\lvert u\rvert$
$u'\, e^u$	$\mathscr{D}$	e^u
$\alpha\, u'\, u^{\alpha-1}\ (\alpha \in \mathbb{R}^\star)$	$I \subset \mathscr{D}$ et $u > 0$ sur I	u^α
$-u' \sin u$	$\mathscr{D}$	$\cos u$
$u' \cos u$	$\mathscr{D}$	$\sin u$
$u'\left(1 + \tan^2 u\right) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$I \subset \mathscr{D}$ et $u \in D_{\tan}$ sur I	$\tan u$

On aura intérêt à transformer les puissances d'une fonction u écrites au dénominateur, ainsi que les racines carrées, cubiques... en puissances de u au numérateur. Ainsi :

$$\frac{1}{u^3} = u^{-3} \text{ et } \sqrt[3]{u} = u^{1/3}.$$

25.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

25.2.1 Définition, lien entre intégrale et primitive

Propriété 25.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^0(I)$ et F et G deux primitives de f sur I.
Soit $(a,b) \in I^2$, alors

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

Définition 25.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^0(I)$, F une primitive de F sur I et $(a,b) \in I^2$.
On appelle intégrale de f de a à b le réel

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarque 25.4.
- t est appelée la variable d'intégration, le choix de la lettre pour la variable d'intégration n'a pas d'importance mais on évitera au possible d'utiliser une lettre déjà utilisée dans un autre contexte
- Le terme $\mathrm{d}t$ est fondamental et ne doit surtout pas être omis
- On a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$
- D'après la proposition précédente le résultat ne dépend pas du choix de la primitive F

Corollaire 25.1. *Soit f une fonction dérivable sur I et $(a,b) \in I^2$, on a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 25.2

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$ et $x_0 \in I$.
Soit $F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
F est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Remarque 25.5. Ces deux résultats constituent ce que l'on appelle parfois le théorème fondamental de l'analyse

25.2.2 Interprétation graphique

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Théorème 25.3

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire de la zone situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Le résultat au programme de BCPST se limite aux fonctions à valeurs positives mais on peut l'étendre aux fonctions à valeurs négatives.

Propriété 25.4

Soit f une fonction continue et négative sur un segment $[a,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'opposé de l'aire de la zone situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
On dira aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire algébrique de la zone situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Remarque 25.6. Si f est une fonction continue qui change de signe entre a et b alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire algébrique de la zone situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. On compte positivement les parties au dessus de l'axe des abscisses et négativement les parties en dessous de l'axe des abscisses.

25.3 Propriétés de l'intégrale

25.3.1 Propriétés de base

Propriété 25.5: Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit $(a,b) \in I^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 25.6: Relation de Chasles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Soit $(a,b,c) \in I^3$. Alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 25.7: Positivité de l'intégrale

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur I telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq 0$$

Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Propriété 25.8: Croissance de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I telles que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leq g(x)$$

Alors, si a et b sont deux réels tels que $a \leq b$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 25.9

Soit I un intervalle de $f \in \mathscr{C}^0(I)$. Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. On sait que f atteint un maximum et un minimum sur le segment $[a,b]$. De plus on a

$$(b-a)\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq (b-a)\max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Définition 25.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur I.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 25.10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur I.
Alors la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est atteinte en un point du segment $[a,b]$.
C'est-à-dire

$$\exists c \in [a,b], \qquad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 25.7. On retrouve le théorème des accroissements finis appliquée à la primitive F de f .

Propriété 25.11

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur I. On a alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Propriété 25.12

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur I à valeurs positives ou nulles.
Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[a,b]$.

25.3.2 Intégration par parties

L'intégration par parties est une technique fondamentale de manipulation et de calcul des intégrales qu'il vous faut absolument maitriser parfaitement.

Théorème 25.4: Intégration par parties

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$. Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

On note généralement

$$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 25.8. Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'effectuer une intégration par parties sera indiquée.

Exemple 25.1. Calculons les intégrales suivantes

- $\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ où $x > 1$
  Prenons $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$. Alors $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$. D'où

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - x + 1\end{aligned}$$

  En particulier $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x$
  Prenons $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$, alors $u'(x) = cos(x)$ et $v'(x) = 1$. D'où

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^p i\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -[-\cos(x)]_0^\pi \\ &= -2\end{aligned}$$

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$
  On prend $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = t^2+t-1$ d'où $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = 2t+1$ Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\cos(t)(t^2+t-1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(2t+1)\,\mathrm{d}t$$

  On prend ensuite $a(t) = \sin(t)$ et $b(t) = 2t+1$, d'où $a'(t) = \cos(t)$ et $b'(t) = 2$
  Alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(2t+1)\,\mathrm{d}t = [\sin(t)(2t+1)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)(2t+1)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-2\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2+t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\cos(t)(t^2+t-1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(t)(2t+1)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-2\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[-\cos(t)(t^2+t-1)+\sin(t)(2t+1)+2\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi+1-1-2 \\ &= \pi-2\end{aligned}$$

25.3.3 Changement de variables

Théorème 25.5

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J)\subset I$.
Soit $(a,b)\in J^2$. On a alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque 25.9.

- En général on part du terme de gauche pour arriver au terme de droite mais parfois on partira du terme de droite pour aller vers le terme de gauche.
- Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, le changement de variables sera donné par l'énoncé.

Il y a essentiellement deux manières de rédiger un changement de variables. La première est plus longue et plus rigoureuse mais avec de l'habitude on lui préfèrera la seconde rédaction, moins rigoureuse mais plus rapide et plus proche des méthodes utilisées en Physique.

Exemple 25.2.

- Soit $I=\int_1^2 x\ln(x^2)\,\mathrm{d}x$
  Soit $\varphi : x\mapsto x^2$. On a alors

$$\begin{aligned}I &= \int_1^2 x\ln(x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{\varphi'(x)}{2}\ln(\varphi(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} \frac{\ln(u)}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^4 \frac{\ln(u)}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{u\ln(u)-u}{2}\right]_1^4 \\ &= \frac{4\ln(4)-4+1}{2} \\ &= 4\ln(2)-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

- Soit $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^3\,\mathrm{d}x$

Soit $u : x \mapsto \cos(x)$.
Alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$
On a alors

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)(1-u(x)^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} u^2 - 1 \,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^0 u^2 - 1 \,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 1 - u^2 \,\mathrm{d}u \\
&= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, tout semble se passer comme si on avait « simplifié » le $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ en $\mathrm{d}u$. Ce n'est absolument pas le cas mais c'est en cet abus bien pratique que consiste la seconde méthode pour les changements de variables.

- Soit $H = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

  Posons $u = \arctan(t)$. Alors $u = \tan(t)$ et $\mathrm{d}u = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
  De plus pour $t = 0$ on a $u = 0$ et pour $t = 1$ on a $u = \frac{\pi}{4}$.
  Alors

$$\begin{aligned}
H &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan(u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)^2\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

25.4 Sommes de Riemann, Méthode des rectangles

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont on ne sait pas calculer l'intégrale. On a vu que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ correspondait à l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses. On pourrait alors essayer de mesure cette aire pour approcher la valeur de l'intégrale de f. Malheureusement cette zone n'est en général pas d'une forme « régulière » dont on pourrait mesurer l'aire facilement. On va alors approcher cette aire en découpant la zone entre $\mathscr{C}_f$ en plusieurs petits rectangles.

Théorème 25.6: Cas du segment $[0,1]$

Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$. Alors

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Théorème 25.7: Cas général

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Remarque 25.10.

- Les deux sommes sont appelées des sommes de Riemann associées à f.
- La première somme correspond à la méthode dite des rectangles à gauche et la seconde somme à la méthode des rectangles à droite.
- Ce résultat permet de déterminer des valeurs approchés d'intégrale que l'on ne peut pas calculer explicitement.

Exercice 25.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

En se ramenant à une somme de Riemann, étudier la limite lorsque $n \to +\infty$ de S_n.