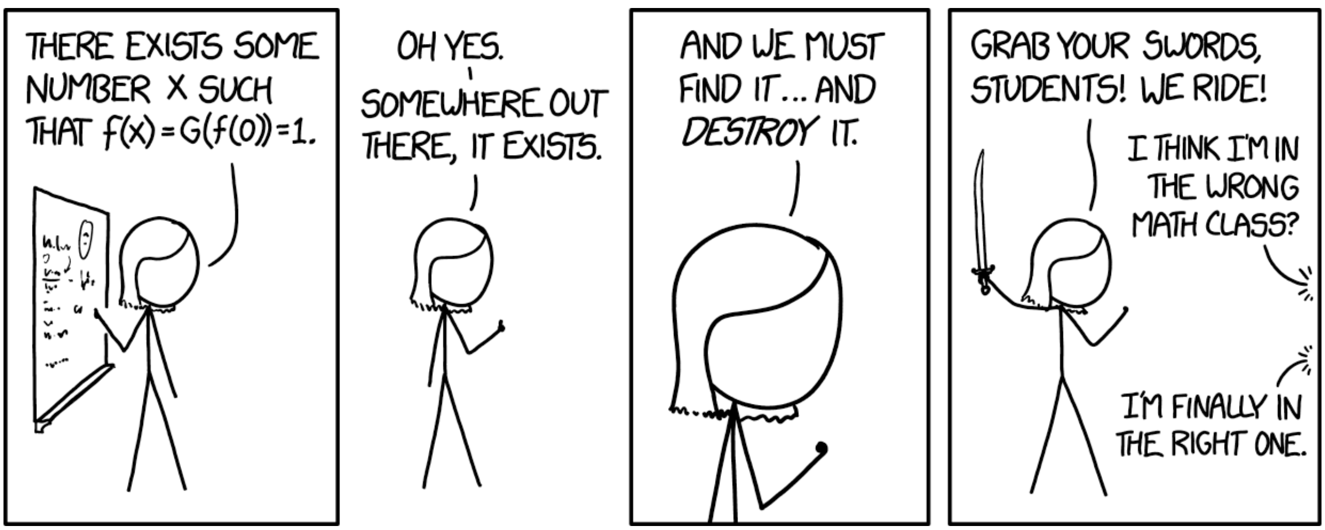
Chapitre 24

Dérivation des fonctions réelles



Sommaire

Dans tout ce chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

24.1 Dérivabilité

24.1.1 Dérivabilité en un point, fonction dérivée

Définition 24.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. La fonction f est dite dérivable en x_0 si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie quand x tend vers x_0.
Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Remarque 24.1.

- En prenant $h = x - x_0$ on voit que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.
- On écrit $f'(x)$, ce qui est très différent de $f(x)'$ (qui n'a pas de sens).

Exemple 24.1.

- Soit $K \in \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K \end{array}$ la fonction constante égale à K. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$, en effet on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \qquad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

- Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}, \qquad \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x + x_0$$

Ainsi $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$, g est donc dérivable en x_0 et $g'(x_0) = 2x_0$.

- Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $x_0 > 0$ On a

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}, \qquad \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Ainsi $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, h est donc dérivable en x_0 et $h'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Par contre $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = +\infty$, h n'est pas dérivable en x_0.

Théorème 24.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0.

Remarque 24.2. La réciproque est absolument fausse! Il existe des fonctions continues mais pas dérivables (voir plus bas l'exemple de la fonction valeur absolue en 0).

Propriété 24.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors*

$$f(x) - f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 24.2. Grâce à cette propriété, on retrouve les équivalents classiques vus au chapitre 16.(hormis celui du cosinus).

- $\sin(x) \underset{0}{\sim}$
- $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim}$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim}$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$
- $\ln(x) \underset{1}{\sim}$
- $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim}$
- Si $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim}$

Définition 24.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, la fonction f est dite dérivable à gauche en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0.
De même f est dite dérivable à droite en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0.
Quand ces limites existent on note alors

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Propriété 24.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

Dans ce cas on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple 24.3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ On a

$$\forall\, x < 0, \qquad \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\forall\, x > 0, \qquad \frac{|x|}{x} = 1$$

Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en 0 et on a

$$f'_g(0) = -1, \qquad f'_d(0) = 1$$

f n'est alors pas dérivable en 0.

Définition 24.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
On appelle alors fonction dérivée de f la fonction qui, à $x \in I$, associe le nombre dérivée de f en x. On la note f'

Propriété 24.3. *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Là encore la réciproque est fausse !

Remarque 24.3. Parfois, surtout en physique, on note $\frac{df}{dx}$ la dérivée, cette notation est à éviter en mathématiques car elle donne un rôle particulier à la lettre x alors que le choix de la lettre pour la variable est muet.

Exemple 24.4.

- Les fonctions constantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$

24.1.2 Interprétation graphique

Définition 24.4

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $M_0(x_0, f(x_0))$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x_0.
Pour $x \in I$ notons $M(x, f(x))$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x.
Une droite Δ est dite être la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 si $M_0 \in \Delta$ et si le coefficient directeur de la corde (MM_0) tend vers celui de Δ quand x tend vers x_0.

Remarque 24.4.

- En un certain sens la tangente à $\mathscr{C}_f$ en M_0 est la « limite des cordes (MM_0) ».
- C'est le problème, très important au 17-ème siècle, de la recherche des tangentes aux courbes des fonctions qui a conduit à l'introduction de la notion de dérivée et, par suite, à une grande partie de l'analyse moderne.

Théorème 24.2

Soit f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe possède, au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.
Cette tangente est la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Remarque 24.5. Dans le cas où f n'est que dérivable à gauche ou à droite on parle alors de demi-tangentes. Il est tout à fait possible que f admet des demi-tangentes à gauche et à droite des coefficients directeurs différents.

La fonction $x \mapsto |x-1|$ est dérivable à gauche et à droite en 1 mais pas dérivable en 1. Sa courbe admet donc une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite.

24.2 Calcul des dérivées

24.2.1 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 24.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont dérivables en x_0 alors $f+g$, λf et $f \times g$ sont dérivables en x_0. On a alors

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
- $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Si, de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en x_0. On a alors

- $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Corollaire 24.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- *$f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$*

- *λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$*

- *$f \times g$ est dérivable sur I et $f \times g)' = f' \times g + g' \times f$*

Si g ne s'annule pas sur I alors

- *$\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right) = -\dfrac{g'}{g^2}$*

- *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$*

Théorème 24.4: Dérivée de la composée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$.
On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times (g' \circ f)(x_0)$$

Corollaire 24.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et*

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

Théorème 24.5: Dérivée de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. D'après le théorème de la bijection continue f est bijective de I dans un intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone de même monotonie que f.
Si, de plus, f est dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Corollaire 24.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et strictement monotone. D'après le théorème de la bijection continue f est bijective de I dans un intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone de même monotonie que f.*

f^{-1} est alors dérivable sur $\{y \in J\ ,\ f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}$.

En particulier si f' ne s'annule pas alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Remarque 24.6. Quand on sait que f^{-1} est dérivable, on peut retrouver la formule de la dérivée de f^{-1}.

Soit $g = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$. g est dérivable et on a, si f^{-1} est dérivable en y et f est dérivable en $f^{-1}(y)$

$$\forall\, y \in J, \qquad g'(y) = (f^{-1})'(y) \times f' \circ f^{-1}(y)$$

De plus

$$\forall\, y \in J\ ,\ g'(y) = 1$$

Ainsi

$$\forall\, y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

en supposant que $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas.

Exemple 24.5. Le cas des fonctions :

- Carré et $\sqrt{\cdot}$
- ln et exp
- tan et arctan

24.2.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Intervalle de dérivabilité	Dérivée
$x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nx^{n-1}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$x \longmapsto \frac{n}{x^{n+1}}$
$x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\begin{cases}]0, +\infty[& \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$x \longmapsto \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto e^x$
$x \longmapsto \ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x \longmapsto 1/x$
$x \longmapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$x \longmapsto ax^{a-1}$
$x \longmapsto b^x$, $b > 0$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \ln(b) b^x$
$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos(x)$
$x \longmapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin(x)$
$x \longmapsto \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$
$x \longmapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$
$x \longmapsto \arcsin(x)$	$]-1, 1[$	$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \longmapsto \arccos(x)$	$]-1, 1[$	$x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

24.3 Théorème de Rolle et conséquences

24.3.1 Extremum local

Définition 24.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit f admet un extremum local en x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \text{ou} \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Plus précisément, f atteint un maximum local en $x_0 \in I$ si

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

De même, f atteint un minimum local en $x_0 \in I$ si

$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

Exemple 24.6. Par exemple

Théorème 24.6

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in]a, b[$. On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in]a, b[$ alors x_0 est un point critique de f (i.e. $f'(x_0) = 0$)

Exemple 24.7. Par exemple

Remarque 24.7.
- La réciproque est fausse. En effet, tous les points critique ne sont pas des extremums, e.g. $f : x \mapsto x^3$ admet 0 comme point critique mais n'admet pas d'extremum local en 0.
- Le résultat n'est valable que si x_0 est « à l'intérieur de l'intervalle » et pas sur un bord. Par exemple la fonction $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ admet un maximum local en 1 et un minimum local en 0 mais aucun de ces points n'est un point critique.

24.3.2 Théorème de Rolle, Accroissements finis

Théorème 24.7: de Rolle

Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

On peut généraliser ce résultat.

Théorème 24.8: Formule des accroissements finis

Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque 24.8. En particulier si $f(a) = f(b)$ on retrouve le théorème de Rolle.

24.3.3 Monotonie, stricte monotonie

Théorème 24.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors

- f est croissante sur I si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$$
- f est décroissante sur I si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0$$
- f est constante sur I si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0$$

Remarque 24.9. Il est important de remarquer que ce théorème ne s'applique que sur un intervalle.

Une fonction définie sur la réunion de deux intervalles de dérivée positive n'est pas forcément croissante (et ne l'est souvent pas)

Par exemple soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$$

Pourtant f n'est pas décroissante, en effet on a $-1 < 1$ mais $f(-1) < f(1)$.

Propriété 24.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

- *Si*
$$\forall x \in I, \qquad f'(x) > 0$$
Alors f est strictement croissante sur I.
- *Si*
$$\forall x \in I, \qquad f'(x) < 0$$
Alors f est strictement décroissante sur I.

Propriété 24.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$$

et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.

De même, si

$$\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$$

et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Exemple 24.8. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \sin(x) \end{array}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 1 - \cos(x)$$

Ainsi

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) \geqslant 0$$

et

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I, ainsi f est strictement croissante sur I. Comme f est strictement croissante sur tout segment de $\mathbb{R}$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a vu que, si f admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ alors $f'(x_0) = 0$, la réciproque est, elle, fausse. On a par contre

Propriété 24.6. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in]a, b[$.*

Si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe en x_0 alors f atteint un extremum local en x_0.

Remarque 24.10. Il n'y a pas de résultat pour déterminer si f atteint un extremum global en x_0, il faut étudier au cas par cas.

24.4 Dérivées d'ordre supérieur

24.4.1 Définition

Définition 24.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est deux fois dérivable sur I si

- f est dérivable sur I,
- f' est dérivable sur I.

La dérivée de f' s'appelle dérivée seconde de f et se note f'' ou $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (lire « d 2 f sur d x 2 »).
Plus généralement on définit par récurrence les fonctions n-fois dérivables.
On dit que f est n-fois dérivable sur I si

- f est dérivable
- f' est $n-1$ fois dérivable

On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, on a alors

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(1)} = f'$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad (f')^{(n-1)} = (f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$

Remarque 24.11. On note également $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

Définition 24.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$

- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I (ou que f est n-fois continument dérivable sur I) si f est n-fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I. (Note : Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est continue.)
  On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. En particulier $\mathscr{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I et $\mathscr{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables de dérivée continue sur I.
- Si f est n-fois dérivable sur I pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on dit alors que f est infiniment (on indéfiniment) dérivable. On dit également que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
  On note $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Remarque 24.12. On a

$$\mathscr{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^k(I)$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathscr{C}^\infty(I) \subset \mathscr{C}^n(I) \subset \mathscr{C}^{n-1}(I) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(I) \subset \mathscr{C}^0(I)$$

Exemple 24.9.
- Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonction ln et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

24.4.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Propriété 24.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $(f, g) \in \mathscr{C}^n(I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f + g$ sont de classes $\mathscr{C}^n$ sur I et*
- $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$
- $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

Corollaire 24.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^n(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
De plus $\mathscr{C}^\infty(I)$ est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété 24.8. *Soit $f \in \mathscr{C}^n(I)$ et $g \in \mathscr{C}^n(J)$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.*
Alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
Si, de plus f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

En particulier dans le cas où $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ on a

Propriété 24.9. *Soit $f \in \mathscr{C}^n(I)$, on suppose que*

$$\forall\, x \in I \quad f(x) \neq 0$$

Alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.