DM6 – Mathématiques

A rendre le lundi 19 mai 2025

Exercice 1. On travaille dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer sa dimension.
2. On considère les matrices
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Démontrer que $B = (U, V)$ est une base de E.

   (b) Soient a et $b \in \mathbb{R}$. Notons $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $M_{a,b}$ dans la base B.
3. Calculer U^n et V^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer les produits UV et VU.
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer les coordonnées de la matrice $M_{a,b}^n$ dans la base B pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de $M_{a,b}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On note $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante : $\mathcal{F} = ((1,1,2), (0,1,1), (2,1,3), (5,6,10))$.

1. Calculer $\text{rg}(\mathcal{F})$ et en déduire que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ?
2. Extraire de $\mathcal{F}$ une base de $\mathbb{R}^3$.