Informatique - TP 12

Recherche par dichotomie

M. Marmorat, M. Morel

21 mai 2025

Dans ce TP, vous aurez besoin de votre cours sur la recherche par dichotomie, disponible sur cahier de prépa.

Vous aurez également besoin de tracer des courbes en Python. A titre de rappel, le script suivant

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.linspace(0, 5, 100)
y = np.cos(x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

trace la courbe de la fonction $\cos$ sur l'intervalle $[0,5]$, discrétisé avec 100 points.

Exercice 1 **Pour démarrer** Reprendre le cours sur la dichotomie et écrire une fonction `recherche_zero(f, debut, fin, precision)` comme dans le cours. On utilisera cette fonction dans toute la suite de ce TP.

Exercice 2 **Entraînement** On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.

On considère l'application

$$g : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + \ln x$$

1. Tracer le graphe de la fonction g en Python.
2. Vérifier graphiquement que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule sur $\left]0,+\infty\right[$.
   On note α cette solution et donner un encadrement de α.
3. Ecrire un programme `python` qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3 **Valeur approchée de $\sqrt{2}$**

Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Tracer le graphe de g, définie par $g(x) = f(x) - x$.
   Vérifier ainsi que f admet un unique point fixe sur $[a,b]$, où a et b sont deux réels à déterminer.
   On note α ce point fixe.
2. Ecrire un programme Python qui donne une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. Donner la valeur exacte de α.

Exercice 4 Valeur approchée de $\sqrt{3}$

Même exercice avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Valeur approchée de $\ln 2$

Même exercice avec $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, pour tout $x > 0$.

Exercice 6

A dapter le modèle des exercices précédents pour calculer une approximation des constantes π puis e à l'aide de l'algorithme de recherche par dichotomie.

Exercice 7 Suites implicites

On considère la fonction f définie comme suit :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\,\ln(1-x)} \text{ pour tout } x \in]0,1[\,.$$

1. Dans un même repère, tracer la courbe représentative de f et les droites d'équations $y = n$, pour $n = 1, \ldots, 10$.
2. Pour tout entier naturel n non nul, vérifier que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur $]0,1[$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n \in]0,1[$ tel que $f(u_n) = n$.
   (a) Ecrire un programme Python qui donne une valeur approchée de u_n à 10^{-2} près.
   (b) Etablir une démarche informatique permettant d'émettre une conjecture sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8

Même exercice que le précédent avec l'équation $x + \tan x = n$, d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 9

On désigne par n un entier naturel non nul et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = nx - e^{-x}$$

1. Tracer dans un même repère les courbes des fonctions f_n, pour $n = 1, \ldots, 6$.
2. Vérifier graphiquement que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique notée u_n.
3. Ecrire un programme Python qui donne une valeur approchée de u_n à 10^{-2} près.
4. Etablir une démarche informatique permettant d'émettre une conjecture sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 10

Même exercice que le précédent avec l'équation $\ln x - \frac{1}{x^n} = 0$ sur $]0, +\infty[$.