

## TD<sub>22</sub> Applications linéaires

### 1 Applications linéaires : image et noyau.

#### Exercice 1

On considère l'application  $f$  définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (-2y + 3z + t, -x - 2y + 3z + t, -x + 2z + t). \end{array}$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension de  $\text{Ker } f$ .
3. Déterminer le rang de  $f$ . En déduire  $\text{Im } f$ .

#### Exercice 2

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + 5y + 5z, x + 2y + 2z, x + 3y + 3z) \end{array}$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

#### Exercice 3

Pour chaque application linéaire, déterminer son noyau et son image. Est-elle injective? surjective?

1.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :  $f(x, y) = (x + y, x - y, x + y)$ .
2.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie par :  $f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$ .

#### Exercice 4

Soit  $m \in \mathbb{R}$  et  $f_m$  l'endomorphisme :

$$f_m: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & ((1 + m)x + 3y, -x + (1 - m)y) \end{array}$$

Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles  $f_m$  n'est pas bijective. Pour chacune de ces valeurs, déterminer le noyau et l'image de  $f_m$ .

### 2 Écriture matricielle d'une application linéaire.

#### Exercice 5

Soient

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, x + z) \end{array} \quad \text{et } g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 5x + y - z \end{array}$$

1. Vérifier que  $f$  et  $g$  sont linéaires.
2. Déterminer les matrices de  $f$  et  $g$  relativement aux bases canoniques.
3. Déterminer la matrice de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{E} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{F} = ((1, 0), (1, 1))$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 6**

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner une base de  $\text{Ker } f$  et de  $\text{Im } f$ .

**Exercice 7**

On considère l'application  $f$  définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (-2y + 3z + t, -x - 2y + 3z + t, -x + 2z + t) \end{array}$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2. Donner la matrice de  $f$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^3$ .
3. On pose :  
 $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1, 0)$ ,  $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ ,  
 $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0, 0)$ ,  $v_3 = (0, 2, 1)$ .  
 Vérifier que  $\mathcal{E} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  est une base de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Donner la matrice de  $f$  relativement aux bases  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ .

**Exercice 8**

1. On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par sa matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose  $u_1 = (1, -1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 0, 0)$  et  $u_3 = (0, -1, 2)$ , trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Montrer que  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et donner la matrice de  $f$  dans cette base. Que remarquez-vous?

2. On note  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par sa matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

On pose  $v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, -1)$  et  $v_3 = (1, -1, 1)$ , trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

Montrer que  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et donner la matrice de  $g$  dans cette base. Que remarquez-vous?

**Exercice 9**

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On désigne par  $h$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont l'expression analytique est :

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + 2z \\ y' &= -x + y + z \\ z' &= -2x + y + 2z \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice  $A$  de  $h$ .
2. Déterminer une base de  $\text{Ker } h$ . Quel est le rang de  $h$ ? Donner une base de  $\text{Im } h$ .
3. Déterminer la matrice de  $h^2$ . Quel est le rang de  $h^2$ ? Son noyau, son image?
4. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , justifier que  $h^n = h^2$ .