TD$_{23}$ Variables aléatoires finies

1 Calcul d'une loi de probabilité

Exercice 1 (• ○ ○)
On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k, on note p le coefficient de proportionnalité. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la face du dé obtenue.

1. Déterminer p et donner la loi de X.
2. Donner la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E(X)$.
4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 2 (• • ○)

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(⟦1,6⟧)$. On pose $Y = 2X^2+3$. Déterminer l'espérance et la variance de X ; l'espérance et la variance de Y, et enfin la loi de Y.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n,p)$ ($n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$). Calculer l'espérance et la variance de $Y = 2^X$.

Exercice 3 (• ○ ○)
Soient $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $⟦1,n⟧$ telle que, pour tout $k \in ⟦1,n⟧$, $P(X=k) = ak(n-k)$.
Déterminer a pour qu'il s'agisse bien d'une loi de probabilité et calculer $E(X)$.

2 Lois usuelles à reconnaître

Exercice 4 (• • ○)
Lors d'une séance de tirs au but, une footballeuse a une probabilité $p \in [0,1]$ de marquer à chaque essai. Elle réalise n essais qu'on suppose indépendants.

On note, pour $k \in \{1,\dots,n\}$, X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ème essai est un but, 0 sinon et on note Y le nombre de buts inscrits lors des n essais.

1. Donner la loi de X_k, pour $k \in \{1,\dots,n\}$.
2. Donner la loi de Y.

Déterminer la probabilités des événements suivants :

3. Elle marque au moins un but,
4. Elle marque exactement un but, lors de sa dernière tentative,
5. Elle marque exactement 1 but,
6. Elle marque exactement k buts.

Exercice 5 (• ○ ○)
Un QCM est composé de n questions. Pour chaque question, il est proposé quatre réponses dont une seule est juste. Répondre correctement à une question rapporte 3 points et répondre faux enlève 1 point.
Un candidat répond au hasard à toutes les questions. On note X le nombre de réponses correctes et S le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X. Donner son espérance et sa variance.
2. Exprimer S en fonction de X. En déduire l'espérance et la variance de S.
3. On suppose que $n = 5$ et que la note N du candidat est égale à S si $S > 0$, elle est égale à 0 sinon. Quelle est l'espérance de N ?

Exercice 6 (• • ◦)
L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées.
On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la bonne réponse est p. On note, pour $1 \leqslant i \leqslant 40$, l'événement $A_i =$"le candidat donne la bonne réponse à la $i$ème question".
On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Déterminer la loi de S.
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Exercice 7 (♥)
Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ de gauche à droite. Une puce part de la case numéro 0 et se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut, avec équiprobabilité. Les déplacements successifs de la puce sont indépendants.
Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance. Même question pour X_2.
2. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
3. Calculer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de X_n et son espérance.
4. On suppose maintenant que la probabilité que la puce effectue un saut de 1 case vaut $p \in [0, 1]$. Que vaut la probabilité que la puce effectue un saut de 2 cases ? Reprendre les questions précédentes.

3 Fonction de répartition et loi d'un min/max

Exercice 8 (♥)
On tire avec remise cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. On note X la variable aléatoire égale au maximum des cinq numéros obtenus et Y la variable aléatoire égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
   En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (• • ◦)
Soit N un entier supérieur à 10. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne et on note Y la v. a égale au plus grand nombre tiré.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Combien y a-t-il de poignées telles que $(Y \leqslant k)$? En déduire $P(Y \leqslant k)$.
4. Déterminer la loi de Y.

4 Pour aller plus loin

Exercice 10 (• • ◦)
Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1 - p$.
On définit la variable aléatoire X par :
$X = k$ si le $k$ième candidat réussit le test,
$X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X, et vérifier vos calculs (qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité).
2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Exercice 11 (• • ◦)
Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant

- ou bien une seule marche, avec probabilité p ;
- ou bien deux marches, avec la probabilité $1 - p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres. On observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies.

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Exprimer Y_n en fonction de X_n.
3. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

Exercice 12 (• • •)
On se propose d'analyser le sang de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec la probabilité p, indépendemment des autres.
On dispose pour cela de deux protocoles :

- Protocole 1 : on analyse le sang de chacun des N individus.
- Protocole 2 :
  On regroupe les individus par groupe de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.
2. Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées dans le deuxième protocole. Exprimer $E(Y)$ en fonction de n, N et p.
3. Comparer les deux protocoles pour les valeurs $N = 1\,000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.

Exercice 13 (• • •)
On dispose d'une pièce et d'un pion placé à l'origine d'un axe gradué. On lance n fois la pièce. A chaque lancer, on déplace le pion d'une unité vers la gauche si on obtient pile, d'une unité vers la droite si on obtient face.
On note X_n l'abscisse du pion à la fin de l'expérience, D_n la distance du pion à l'origine de l'axe et F_n le nombre de fois où la pièce est tombée du côté face.

1. Exprimer D_n en fonction de X_n, et X_n en fonction de F_n.
2. Déterminer la loi de F_n.

3. Calculer l'espérance et la variance de X_n.
4. Comparer la variance de D_n et celle de X_n.
5. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de D_4.

Exercice 14
Pour allumer un feu, on dispose de n allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette donnée est $p \in]0,1[$.

1. On note A l'événement "le feu est allumé" ; déterminer $P(A)$.
2. Quelle est la probabilité que le feu soit allumé et qu'il reste k allumettes, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.