DS8 – Mathématiques

Mercredi 28 Mai 2025

Durée : 2 heures 30

- **L'usage de la calculatrice est autorisé. Aucun autre document ou appareil électronique n'est autorisé.**
- **Utilisez des feuilles doubles à carreau uniquement.**
- Le devoir comporte deux exercices de mathématiques et un exercice d'informatique.
- La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en compte dans la note finale.

Exercice 1 (Informatique)**.** Soient $a < b$ deux nombres réels et $I = [a, b]$. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur I, telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ soient de signes opposés.

1. Justifier qu'il existe un unique nombre réel $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On souhaite calculer, à l'aide de **l'algorithme de recherche par dichotomie**, une valeur approchée de α.

2. On tape le code suivant en Python :

```python
def f(x):
    return x**3 - x - 2

def dichotomie(debut, fin, epsilon):
    f_debut = f(debut)
    f_fin = f(fin)
    if f_debut * f_fin > 0:
        print("Erreur : f(debut) et f(fin) ont un signe identique.")
        return None

    while fin - debut > epsilon:
        milieu = (debut + fin) / 2
        f_milieu = f(milieu)

        if f_debut * f_milieu <= 0:
            fin = milieu
            f_fin = f_milieu
        else:
            debut = milieu
            f_debut = f_milieu

    return (debut + fin) / 2
```

   Pour les quatre questions suivantes, on veillera à répondre grâce à une phrase précise et succincte.

   (a) Que représente la valeur retournée par la fonction `dichotomie` ?

   (b) Que signifie la condition `f_debut * f_fin > 0` ? Pourquoi est-elle importante ?

   (c) Expliquez comment l'intervalle [`debut`, `fin`] évolue à chaque itération.

   (d) Quel est le rôle du paramètre `epsilon` ?

3. (a) Justifier que la fonction $f : x \mapsto x^3 - x - 2$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $I = [1, 2]$ et qu'elle change de signe sur cet intervalle.

   (b) A l'aide de l'étude précédente, tracez la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x - 2$ sur I.

   (c) On exécute l'instruction suivante :

```
dichotomie(1, 2, 0.1)
```

Calculez les 3 premières itérations de l'algorithme à la main : A chaque itération, donnez les valeurs de `debut`, `fin`, `milieu`, `f(milieu)`, et indiquez l'intervalle conservé.

(d) Que peut-on dire de la valeur renvoyée par la fonction `dichotomie`?

Exercice 2 (Une dose de géométrie)**.** Un industriel de l'agroalimentaire réalise deux types de purées :

- la purée A ("carottes-pommes de terre") qui nécessite 750 grammes de carottes et 250 grammes de pommes de terre pour faire 1 kilogramme de purée,
- et la purée B ("pommes de terre-carottes") qui nécessite 250 grammes de carottes et 750 grammes de pommes de terre pour faire 1 kilogramme de purée.

Il dispose en tout de 150 kilogrammes de pommes de terre et de 100 kilogrammes de carottes.

On note :

- x (respectivement y) la quantité de purée A (respectivement B) produite par l'industriel (en kg),
- c (respectivement p) la quantité totale de carottes (respectivement de pommes de terre) utilisée par l'industriel (en kg).

Dans tout l'exercice, on illustrera la situation par des dessins à rendre sur l'annexe. Ces dessins seront réalisés dans le plan (x, y) c'est-à-dire que l'abscisse correspond à la quantité de purée A produite, et l'ordonnée à la quantité de purée B.

1. (a) Exprimer c et p en fonction de x et de y.

   (b) Expliquer pourquoi x et y doivent satisfaire les inéquations suivantes :

$$(*) : \begin{cases} 0 \leq x \leq 600 - 3y \\ 0 \leq y \leq 400 - 3x \end{cases}$$

2. (a) Sur l'annexe, tracer en bleu la droite Δ_1 d'équation $x = 600 - 3y$.

   (b) Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ_2 d'équation $y = 400 - 3x$.

   (c) Déterminer $t \in \mathbb{R}$ tel que le point $A(t, t)$ appartienne à Δ_2.

   (d) Tracer alors en bleu la droite Δ_2 sur l'annexe en utilisant le point A.

3. En annexe, hachurer en bleu la zone $(\mathscr{Z})$ du plan correspondant aux quantités de purées A et B réalisables par l'industriel, c'est-à-dire aux couples (x, y) satisfaisant les inéquations $(*)$.

4. Pour quelles valeurs de x et de y l'industriel utilise-t-il toute sa marchandise? Placer le point $M(x, y)$ correspondant sur le dessin.

Une grande surface propose à l'industriel de lui acheter sa purée A à 3 euros le kg, et sa purée B à 2 euros le kg. En produisant x kg de purée A et y kg de purée B, l'industriel réalise donc un gain g donné en euros par $g = 3x + 2y$.

Pour $k \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_k passant par le point $B(k, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (3, 2)$.

5. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in D_k$ si et seulement si le gain réalisé par l'industriel est égal à $g = 3k$.

6. Tracer en annexe le vecteur $50\,\vec{n} = (150, 100)$ en noir. Tracer ensuite en vert les droites D_k pour $k \in \{100, 150, 200\}$ en utilisant les points $B(k, 0)$.

7. L'industriel peut-il réaliser un gain de 600 euros? *Une justification graphique sera suffisante.*

8. Quelles quantités x et y de purées doit-il produire pour maximiser son gain? Quel est alors son gain maximal? *Une justification graphique, à indiquer en rouge sur l'annexe, sera suffisante.*

Exercice 3 (Étude d'une application linéaire)**.** Considérons

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x-y+z, y, -y+2z) \end{array}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer Ker (f). En déduire que f est bijective.
3. On note $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0)\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une base de F et sa dimension.
   (c) Déterminer l'image de F par l'application linéaire f, c'est-à-dire $f(F)$.
4. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$ dans la base B ; respectivement de $f(e_2)$ et de $f(e_3)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, la matrice qui représente f dans la base $\mathscr{B}$.
5. On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{avec } u_1 = (0,1,1), \quad u_2 = (1,1,1), \quad u_3 = (1,0,1).$$
   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   (b) Déterminer les coordonnées de $f(u_1)$ dans la base B ; respectivement de $f(u_2)$ et de $f(u_3)$ dans la base $\mathscr{B}'$.
   (c) En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, la matrice qui représente f dans la base $\mathscr{B}'$.
6. Montrer que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Retrouver le fait que l'application f est bijective.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f^n = \left(2^n - 1\right) f + \left(2 - 2^n\right) \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$
   On pourra utiliser une preuve par récurrence.

Cette page est volontairement laissée blanche afin de pouvoir détacher l'annexe.

$\boxed{\textbf{ANNEXE}}$ **(à rendre, même si vous ne l'avez pas complétée)**

NOM :

PRENOM :

On rappelle que sur ce schéma, l'abscisse x correspond à la quantité de purée A produite par l'industriel, et l'ordonnée y à celle de purée B. On rappelle les objets à tracer et leurs couleurs :

- en bleu : Δ_1, Δ_2, $(\mathscr{Z})$,
- en noir : M, $50\vec{n}$,
- en vert : $D_{100}, D_{150}, D_{200}$,
- en rouge : ce qui est utile pour la question 8.