

Informatique - TP 13

Variables aléatoires : simulations des lois usuelles et calculs d'espérances

M. Marmorat, M. Morel

5 juin 2025

Dans ce TP, on utilisera les fonctions du module `random`, étudiées lors du TP précédent.

Exercice 1 Premiers calculs d'espérance

- Q1** Écrire une fonction `dice` renvoyant le résultat du lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
- Q2** En utilisant la question précédente, estimer l'espérance du résultat d'un dé équilibré à 6 faces. Le résultat est-il correct intuitivement ?
- Q3** Estimer la variance du résultat d'un dé à 6 faces. Ce résultat est-il conforme à la théorie ?
- Q4** Écrire une fonction `alea` simulant une variable aléatoire X prenant la valeur 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 3 avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Exercice 2 Espérances !

- Q1** Écrire une fonction prenant en argument $p \in [0, 1]$ et simulant une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p .
- Q2** En déduire une fonction simulant une variable aléatoire suivant une loi binomiale Y de paramètres n et p .
- Q3** A l'aide de la première question, écrire un script qui calcule une estimation de l'espérance, puis de la variance, de X . Comparer avec le résultat du cours.
- Q4** A l'aide de la deuxième question, écrire un script qui calcule une estimation de l'espérance puis de la variance de Y . Comparer avec le résultat du cours.
- Q5** Pour deux entiers $m < n$, écrire une fonction simulant une variable aléatoire Z suivant une loi uniforme sur $[[m, n]]$.
- Q6** En déduire une estimation de l'espérance et de la variance de Z .

Exercice 3 Loterie À l'occasion d'un jeu de loterie, un joueur mise une certaine somme d'argent et fait tourner une première fois une roue circulaire découpée en 8 secteurs de même angle numérotés de 1 à 8. Les quatre premiers secteurs sont rouges. S'il tombe sur le secteur 1, il récupère le double de sa mise, sinon il relance la roue et gagne sa mise augmentée de 6 euros s'il tombe sur un secteur de couleur rouge. Dans les autres cas, sa mise est perdue.

- Q1** Écrire une fonction `jeu` simulant une partie. Elle prend la valeur de la mise en paramètre et renvoie la valeur du gain (sans la mise de départ). Tester pour une mise égale à 10 euros.
- Q2** Écrire une fonction `gainMoyen` prenant en paramètres la mise initiale et un nombre n de parties et renvoyant le gain moyen (en euro) obtenu au cours de ces n parties toutes jouées avec la même mise initiale.

Q3 Écrire une fonction `cumul` renvoyant la liste des gains moyens obtenus après k parties pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Représenter ensuite graphiquement l'évolution de la valeur du gain moyen en fonction du nombre k de parties. Que remarque-t-on ?

Q4 À qui profite ce jeu de hasard dans le cas d'une mise de 10 euros ? Justifier.

Exercice 4 **Marche aléatoire 1D** *Cet exercice est repris du TP précédent. Passez à la suite si vous l'avez déjà traité.*

Q1 Écrire une fonction `pas` renvoyant 1 avec probabilité 0.15, 2 avec probabilité 0.25, et 3 avec probabilité 0.6.

Q2 Un pion initialement situé à l'origine d'un axe gradué de 1 en 1 se déplace selon la règle suivante : à chaque temps $n \in \mathbb{N}$, il se déplace d'un nombre aléatoire d'unités vers la droite. Ce nombre est égal à 1 dans 15% des cas, à 2 dans 25% des cas, et à 3 dans 60% des cas. Écrire une fonction renvoyant la position du pion après 10 déplacements.

Q3 Estimer la probabilité que le pion soit à la position 25 après 10 coups.

Q4 En moyenne, à quelle position est le pion après 10 coups ?