Chapitre 27

Fonctions de 2 variables

Sommaire

Dans ce chapitre on s'intéresse aux fonctions de *deux* variables réelles à valeurs réelles c'est-à-dire aux fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

où D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Voici quelques exemples, en mathématiques :

- $f:(x,y)\longmapsto \sqrt{x}+2y$
- $f:(x,y)\longmapsto xy$
- $f:(x,y)\longmapsto e^{xy}\cos(x\ln(y))$

Ou en physique :

-
-

27.1 Représentation des fonctions de 2 variables

27.1.1 Domaine de définition

Étant donnée une expression $f(x, y)$ dépendant de deux variables réelles x et y, il n'est pas toujours facile de déterminer pour quels points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ celle-ci a un sens.
L'ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel f est définie s'appelle *domaine de définition* de f. Donnons quelques exemples :

Exemples :

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto \cos(xy)$ est définie sur $D_1 = \mathbb{R}^2$ tout entier ;
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto \dfrac{1}{x-y}$ est définie sur $D_2 =$
3. $f_3 : (x, y) \longmapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ est définie sur $D_3 =$

En pratique pour trouver l'ensemble D, on procède comme pour les fonctions d'une seule variable, c'est-à-dire qu'on écrit toutes les contraintes qu'engendrent :

- les logarithmes dont les arguments doivent être strictement positifs ;
- les racines carrées dont les arguments doivent être positifs ;
- les quotients dont les dénominateurs ne doivent pas s'annuler.

Exemple 27.1. Déterminer et représenter graphiquement les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto \sqrt{y - x^2}$
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto \sqrt{xy}$

27.1.2 Surface représentative

Dans le cas à une variable, pour représenter une fonction de $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on trace l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $y = h(x)$, i.e. les $(x, h(x))$ pour $x \in \mathbb{R}$. On obtient une *courbe* représentative de h.

Similairement, dans le cas à deux variables, pour représenter une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on trace l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $z = f(x, y)$, i.e. les $(x, y, f(x, y))$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (ou plutôt, pour $(x, y) \in D$ où D est l'ensemble de défintion de f). On obtient une *surface* représentative de f.

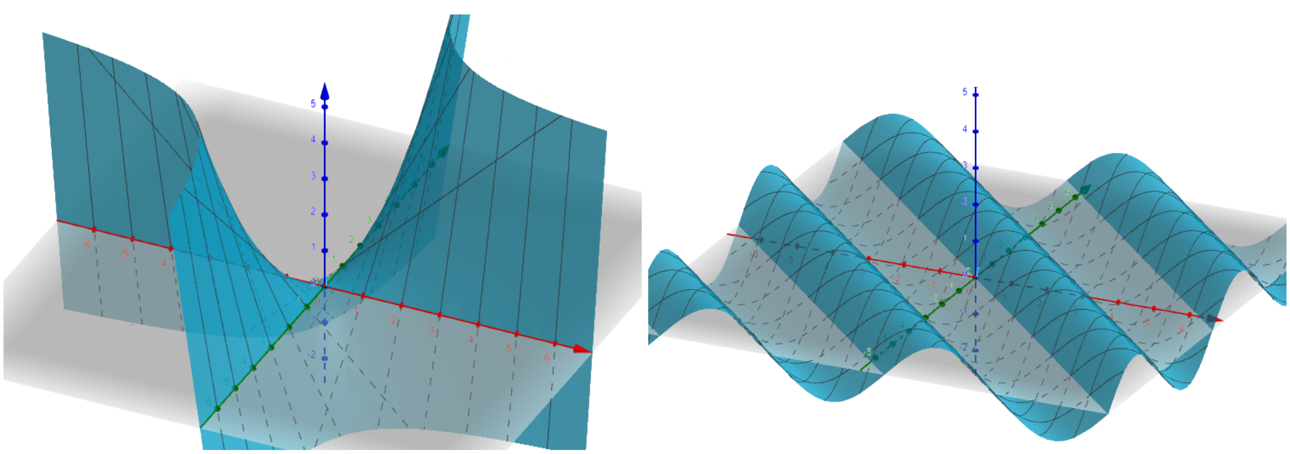

FIGURE 27.1 – Surfaces représentatives de $f : (x, y) \longmapsto xy$ et de $g : (x, y) \longmapsto \sin(x + y)$

27.1.3 Lignes de niveaux

Définition 27.1

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, et soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle <u>ligne de niveau</u> de f pour la valeur k l'ensemble $\{(x, y) \in D \ / \ \ f(x, y) = k\}$.

Remarque 27.1.

1. Ces lignes de niveaux sont les *isobares* si f représente une pression, les *isothermes* si f représente une température, etc.
2. Pour obtenir les lignes de niveau, on imagine qu'on "coupe" la surface représentative de la fonction par le plan horizontal d'équation $z = k$.

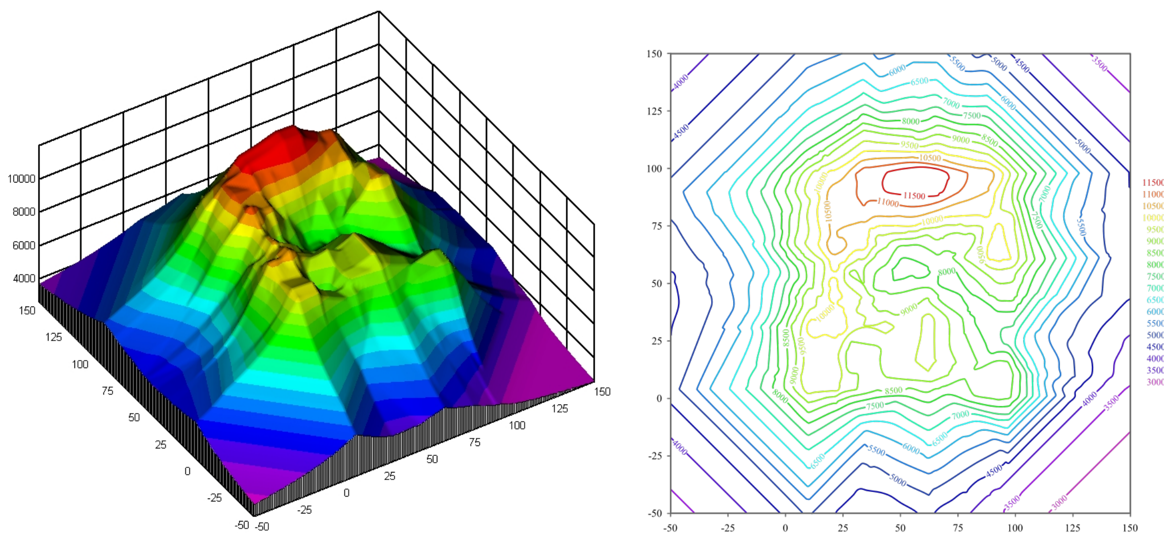

FIGURE 27.2 – Surface représentative d'une fonction et plusieurs de ses lignes de niveau

Exemple 27.2. Soit $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$. Déterminer les lignes de niveau de f. Représenter graphiquement f.

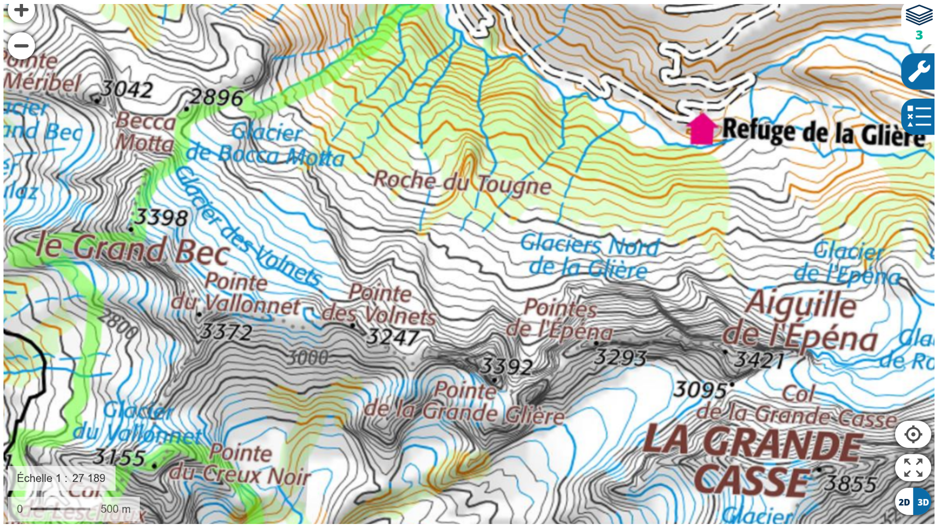

FIGURE 27.3 – Extrait d'une carte IGN du Parc National de la Vanoise (Alpes). Les courbes de niveaux sont les lignes de niveaux de la fonction donnant la hauteur du terrain (source : Géoportail).

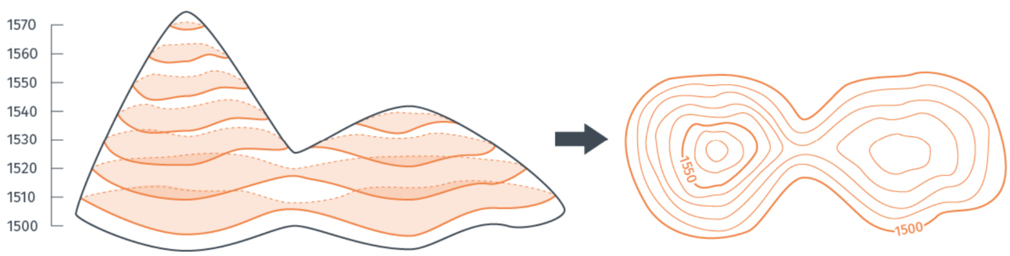

FIGURE 27.4 – De la surface représentative aux lignes de niveaux (source : IGN).

27.1.4 Applications partielles

Souvent en pratique on considère une quantité $f(x,y)$ qui dépend de deux paramètres x et y pouvant varier séparément entre une valeur minimale et une valeur maximale : $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ et $y \in [y_{\min}, y_{\max}]$. Dans ce cas l'ensemble de définition de f est le *pavé* $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$.

Ce cadre relativement simple permet de définir sans difficulté les *applications partielles*, voir ci-dessous. Dans toute la suite de ce cours on énoncera les propositions pour des fonctions de deux variables définies sur des pavés $I \times J$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On signale qu'il est toutefois possible d'écrire ces résultats dans un cadre plus général (au prix de quelques lourdeurs notationnelles).

Définition 27.2

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$.
On appelle :

- application partielle en $x = x_0$ la fonction $\left| \begin{array}{cccc} f(x_0,.) & : & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & y & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array} \right.$
- application partielle en $y = y_0$ la fonction $\left| \begin{array}{cccc} f(.,y_0) & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & x & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array} \right.$

Exemple 27.3. Soit $f : (x,y) \longmapsto x^2 y + 2x + y$.

- pour $y_0 = 1$, l'application partielle en $y_0 = 1$ est

- pour $x_0 = 1$, l'application partielle en $x = 1$ est

Remarque 27.2. Il s'agit de *fixer* une des deux variables puis de regarder l'expression $f(x,y)$ comme une fonction de la variable non fixée.

Interprétation graphique :

Il faut être capable de faire le lien entre la surface représentative de f et les courbes représentatives des applications partielles de f. Pour cela, il faut "se placer" dans le plan $x = x_0$ ou dans le plan $y = y_0$.

Par exemple ci-dessous pour la fonction $f : (x,y) \longmapsto x^3 + \sin(y)$, l'application partielle en $x = 1$ est $h_1 : y \longmapsto 1 + \sin(y)$. Le graphe de h_1 apparaît sur la figure en tant qu'*intersection de la courbe représentative de f avec le plan $x = 1$*. De même l'application partielle en $y = 0$ est $k_0 : x \longmapsto x^3$ et son graphe s'obtient en tant qu'*intersection de la courbe représentative de f avec le plan $y = 0$*.

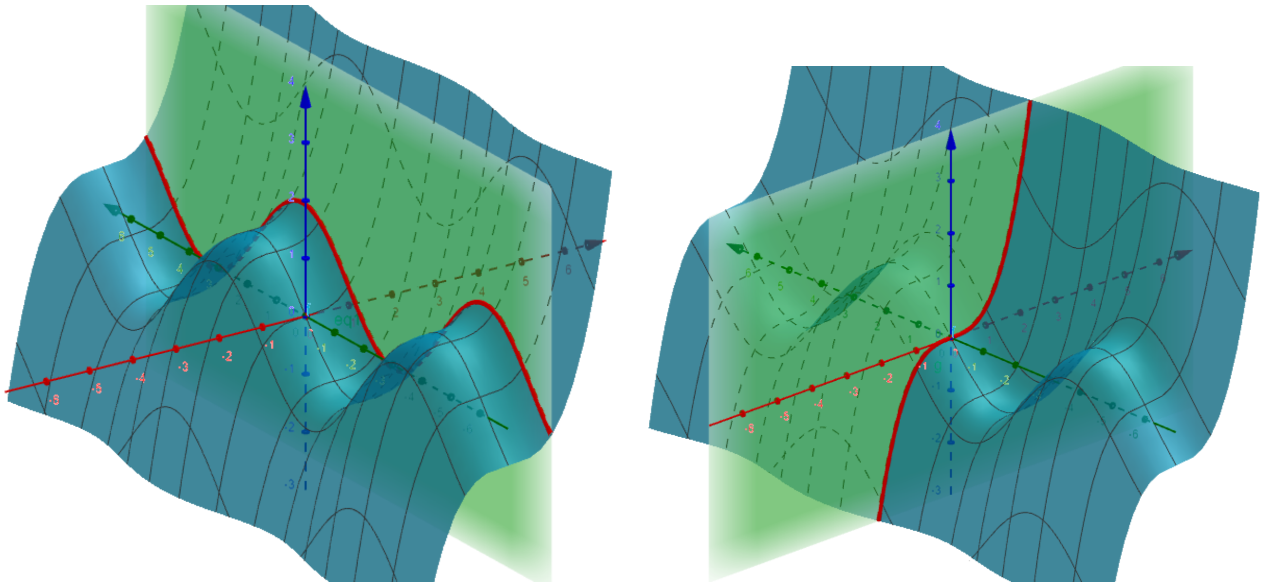

FIGURE 27.5 – Surface représentative de $f : (x, y) \longmapsto x^3 + \sin(y)$, coupes avec les plans $x = 1$ et $y = 0$, animation disponible à `https://www.geogebra.org/3d/qqypy3yw`

27.2 Régularité et dérivées partielles

On s'intéresse le plus souvent à des fonctions de deux variables "régulières". Comme dans le cas des fonctions d'une variable, il y a plusieurs niveaux de régularité : continuité, dérivabilité, caractère $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}^\infty$, etc.

27.2.1 Continuité

La définition de la continuité pour les fonctions de deux variables copie celle pour les fonctions d'une variable. Pour rappel, une fonction d'une variable $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x \in I,\ \big(|x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon\big).$$

Dans cette définition, $|x - x_0| \leq \eta$ renvoie au fait que le réel x "est proche de x_0 à η près". C'est cette partie qu'il faut modifier lorsqu'on a une fonction de deux variables afin d'indiquer que le *couple* (x, y) "est proche du couple (x_0, y_0) à η près". On le fait grâce à une norme :

Définition 27.3. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$, et soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f est contiue en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall (x, y) \in \mathscr{D},\ \big(||(x, y) - (x_0, y_0)|| \leq \eta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon\big).$$

On dit que f est continue sur D, et on note $f \in \mathscr{C}^0(D)$, lorsque f est continue en tout point $(x_0, y_0) \in D$.

Géométriquement, une fonction de deux variables est continue lorsque sa surface représentative n'a pas de "déchirure".

27.2.2 Dérivées partielles d'ordre 1

Pour définir la notion de dérivée, on s'appuie sur les applications partielles i.e. sur des fonctions d'une variable.

Définition 27.4

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables définie sur un pavé $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$. Lorsque ces quantités existent on appelle :

- <u>dérivée partielle de f par rapport à x</u> la fonction $\left| \begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & : & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h'_y(x) \end{array} \right.$
  où $h_y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application partielle $h_y : x \longmapsto f(x, y)$.
- <u>dérivée partielle de f par rapport à y</u> la fonction $\left| \begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial f}{\partial y} & : & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h'_x(y) \end{array} \right.$
  où $h_x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application partielle $h_x : y \longmapsto f(x, y)$.

Exemple 27.4. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto e^{xy} + y^2 - 1$
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto \ln(2x + 3y)$
3. $f_3 : (x, y) \longmapsto xy^2 \cos(x + 2y)$
4. $f_4 : (x, y) \longmapsto \sin(y^2 x)$

Définition 27.5. On dit que $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le pavé $I \times J$, et on note $f \in \mathscr{C}^1(I \times J)$, lorsque les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f existent et sont continues sur $I \times J$.

Définition 27.6. Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Lorsque les dérivées partielles de f existent, on appelle gradient de f, et on note ∇f la fonction :

$$\begin{array}{cccc} \nabla f & : & I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & (x, y) & \longmapsto & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \end{array}$$

Remarque 27.3. Le gradient de f en un point (x, y) est un vecteur comment la fonction f varie au voisinage du point (x, y).

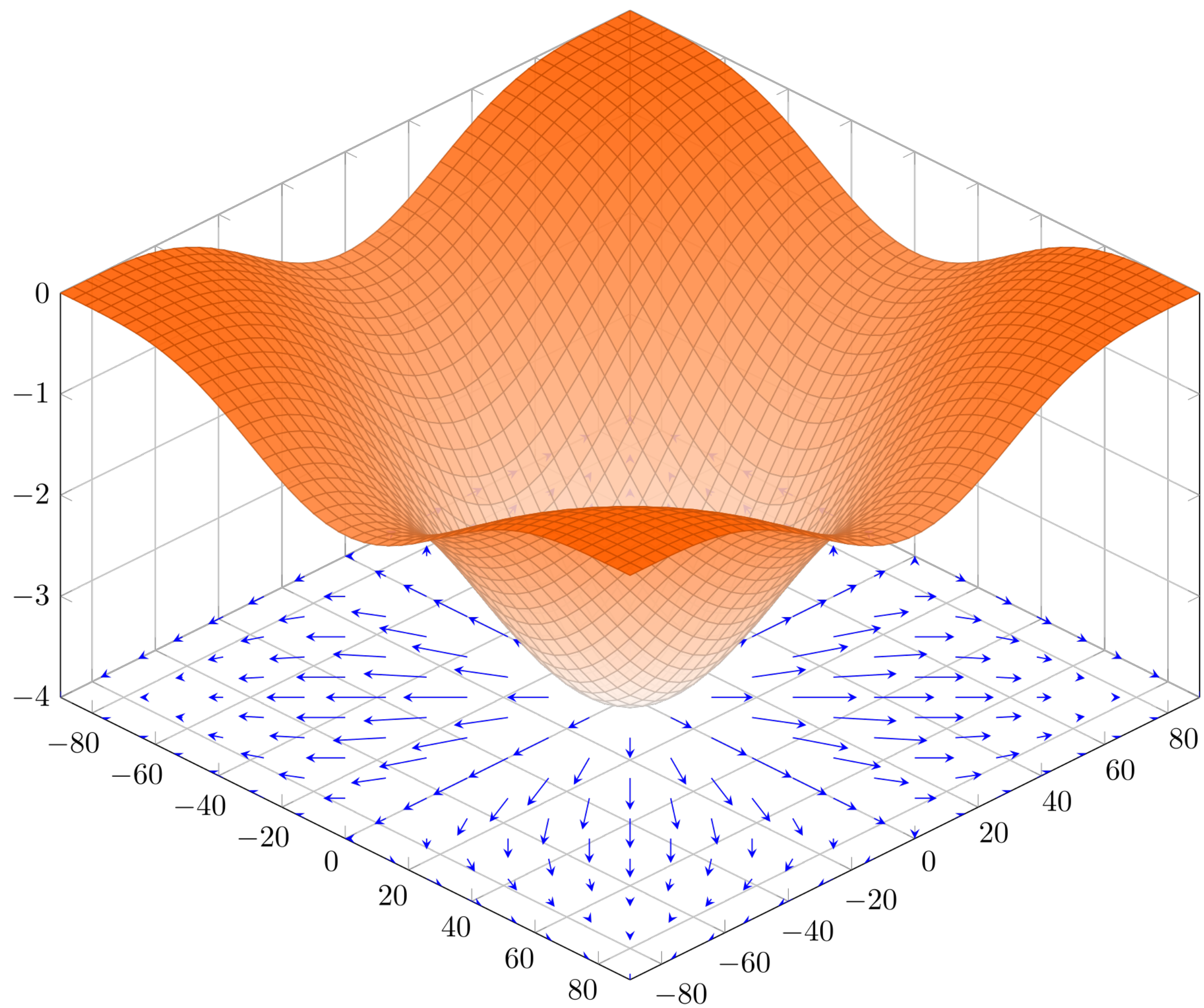

FIGURE 27.6 – La fonction définie par $f(x, y) = -(\cos^2(x) + \cos^2(y))^2$. Surface représentative de f en orange, le gradient est représenté en bleu dans le plan $z = 0$ (source : Wikipédia).

Propriété 27.1. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction de deux variables, et soient $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ deux fonctions d'une variable. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & t & \longmapsto & f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ F'(t) = \varphi'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(t), \psi(t)\big) + \psi'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 27.4. L'identité ci-dessus s'écrit aussi $F'(t) = \big(\varphi'(t), \psi'(t)\big) . \nabla f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$.

27.2.3 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 27.7. Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Lorsque les dérivées partielles de f existent et admettent des dérivées partielles, on définit les dérivées partielles secondes de f, notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, par les formules :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I \times J$, et on note $f \in \mathscr{C}^2(I \times J)$ lorsque toutes ces dérivées existent et sont continues sur $I \times J$.

Remarque 27.5.

1. Les dérivées partielles secondes sont des fonctions définies sur $I \times J$. Attention, il conviendra d'écrire $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)$ et non $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$
2. On peut généraliser cette notion à des dérivées d'ordres supérieurs, ainsi par exemple $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right)\right)$

A priori l'ordre dans lequel sont effectuées les dérivations compte, c'est-à-dire qu'il est possible que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Le théorème suivant indique que cela n'arrive pas pour les fonctions suffisamment régulières :

Théorème 27.1 (Théorème de Schwarz)
Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de deux variables. Si* $f \in \mathscr{C}^2(I \times J)$ *alors* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Démonstration. Admis. □

Exemple 27.5. Vérifier le théorème de Schwarz sur les fonctions suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \longmapsto x^3 y - y^2 x + x - y$
2. $f_2 : (x, y) \longmapsto x e^y + y^2 e^x$
3. $f_3 : (x, y) \longmapsto e^x \sin(xy)$

27.3 Optimisation

27.3.1 Approximation locale

Considérons $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et un point $(x_0, y_0) \in I \times J$. On s'intéresse aux variations de f autour de (x_0, y_0), c'est-à-dire qu'on souhaite comprendre comment $f(x, y)$ diffère de $f(x_0, y_0)$ pour (x, y) proche de (x_0, y_0).

Si l'on se déplace dans la direction y d'une quantité $k << 1$, i.e. si l'on passe de (x_0, y_0) à $(x_0, y_0 + k)$ (avec x_0 fixé, donc), on est ramené à l'étude de l'application partielle en $x = x_0$: $g : y \longmapsto f(x_0, y)$. On peut écrire le développement limité de g en y_0 à l'ordre 1 : $g(y_0 + k) \underset{k\to 0}{=} g(y_0) + k\,g'(y_0) + o(k)$ c'est-à-dire :

$$f(x_0, y_0 + k) \underset{k\to 0}{=} f(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(k).$$

De même, si l'on se déplace dans la direction x d'une quantité $h << 1$, i.e. si l'on passe de (x_0, y_0) à $(x_0 + h, y_0)$ alors on a :

$$f(x_0 + h, y_0) \underset{h\to 0}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(h).$$

Il est alors naturel (mais complètement évident à justifier sans plus de travail) de dire que passer de (x_0, y_0) à $(x_0 + h, y_0 + k)$ s'obtient en additionnant ces deux variations dans les directions x et y, et que l'on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(h, k).$$

Nous n'expliquerons pas ce que signifie précisément $o(h, k)$, mais on peut retenir que pour de petites variations h et k, la variation entre $f(x_0, y_0)$ et $f(x_0 + h, y_0 + k)$ est donnée par la quantité

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (h, k)\,.\,\nabla f(x, y).$$

En particulier, pour h et k suffisamment petits, si $(h, k)\,.\,\nabla f(x, y) \geq 0$ alors $f(x_0 + h, y_0 + k) \geq f(x_0, y_0)$; et si $(h, k)\,.\,\nabla f(x, y) \leq 0$ alors $f(x_0 + h, y_0 + k) \leq f(x_0, y_0)$.

27.3.2 Points critiques et extrema

Définition 27.8. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On appelle point critique de f tout point $(x, y) \in D$ tel que $\nabla f(x, y) = 0$ i.e. tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Définition 27.9. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et soit $(x_0, y_0) \in D$. On dit que f admet :

- un maximum global en (x_0, y_0) lorsque : $\forall\,(x, y) \in D,\ f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- un minimum global en (x_0, y_0) lorsque : $\forall\,(x, y) \in D,\ f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$;
- un maximum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe un pavé $I \times J \subset D$ contenant (x_0, y_0) et tel que : $\forall\,(x, y) \in I \times J,\ f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;

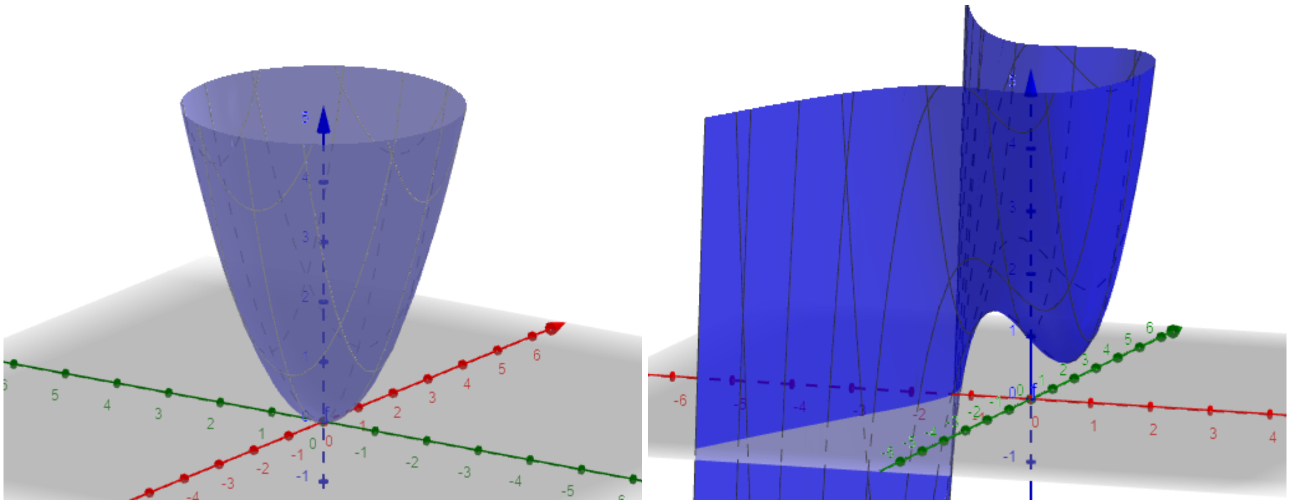

FIGURE 27.7 – À gauche un minimum global, à droite un minimum local non global

- un minimum local en (x_0, y_0) lorsqu'il existe un pavé $I \times J \subset D$ contenant (x_0, y_0) et tel que : $\forall (x, y) \in I \times J,\ f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Remarque 27.6. 1. On parle d'extremum (local ou global) pour désigner un minimum ou un maximum (local ou global).

2. Un extremum global est toujours un extremum local, mais un extremum local n'est pas forcément global.

Propriété 27.2. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $(x_0, y_0) \in D$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors (x_0, y_0) est un point critique de f.*

Idée de la démonstration : Supposons par exemple que (x_0, y_0) soit un minimum local de f, alors pour h et k suffisamment petits $f(x_0 + h, y_0 + k) \geq f(x_0, y_0)$. Or le signe de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ est donné par le signe de $(h, k) . \nabla f(x_0, y_0)$. Il faut donc que pour tous h et k suffisamment petits on ait $(h, k) . \nabla f(x_0, y_0) \geq 0$.
Cela n'est possible que si $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$. En effet, si $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ alors on aurait $||\nabla f(x_0, y_0)|| > 0$. Dès lors, en prenant $(h, k) = -t \nabla f(x_0, y_0)$ avec $t > 0$ suffisamment petit on aurait $(h, k) . \nabla f(x_0, y_0) = -t ||\nabla f(x_0, y_0)||^2 < 0$ ce qui est exclu.

Remarque 27.7. La réciproque est fausse : un point critique de f n'est pas forcément un extremum local de f. On peut donner deux contre-exemples :

1. Tout d'abord, la proposition 19 est l'analogue de la proposition concernant les fonctions d'une variable :

$$\text{Si } f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ admet un extremum local en } x_0 \in \mathbb{R} \text{ alors } f'(x_0) = 0.$$

Or on sait que la réciproque de cette proposition est fausse, par exemple en prenant $f : x \longmapsto x^3$. Ainsi $f : (x, y) \longmapsto x^3$ est aussi un contre-exemple dans le cas des fonctions de deux variables.

2. Un autre contre-exemple reflète d'autres difficultés qui apparaissent pour les fonctions de deux variables. La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ admet $(0, 0)$ pour point critique, mais $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f. En effet, $(0, 0)$ est “minimal dans la direction x” et “maximal dans la direction y” , on parle de *point selle* (cf la figure 27.9).

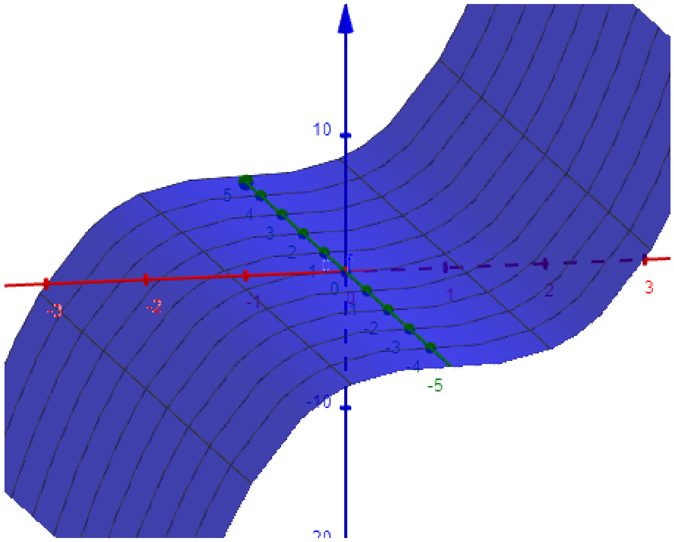

FIGURE 27.8 – Le point $(0,0)$ est point critique mais pas extremum local de $f:(x,y)\longmapsto x^3$

La stratégie pour déterminer les extremums locaux d'une fonction f de deux variables consiste donc à :

- Déterminer les points critiques en résolvant le système $\nabla f(x,y)=(0,0)$.
- Puis pour chacun de ces points critiques (x^*,y^*) étudier la quantité $f(x,y)-f(x^*,y^*)$ pour déterminer si elle est ou non de signe constant. Lorsque c'est le cas (le plus souvent car un carré est apparu), on obtient un maximum si $f(x,y)-f(x^*,y^*)\geq 0$ et un minimum si $f(x,y)-f(x^*,y^*)\leq 0$. Cette deuxième étape, plus difficile, sera guidée la plupart du temps.

Exemple 27.6. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et décider s'il s'agit ou non d'extremum globaux.

1. $f_1:(x,y)\longmapsto x^2+2y^2-2xy+1$.
2. $f_2:(x,y)\longmapsto x^2-y^2$.
3. $f_3:(x,y)\longmapsto x^2+y^2-2x-4y$.
4. $f_4:(x,y)\longmapsto -3x^2-8y^2-10xy$.
   On s'intéressera à $f_4(x,-x)$ *et à* $f_4(x,-\frac{2}{3}x)$.

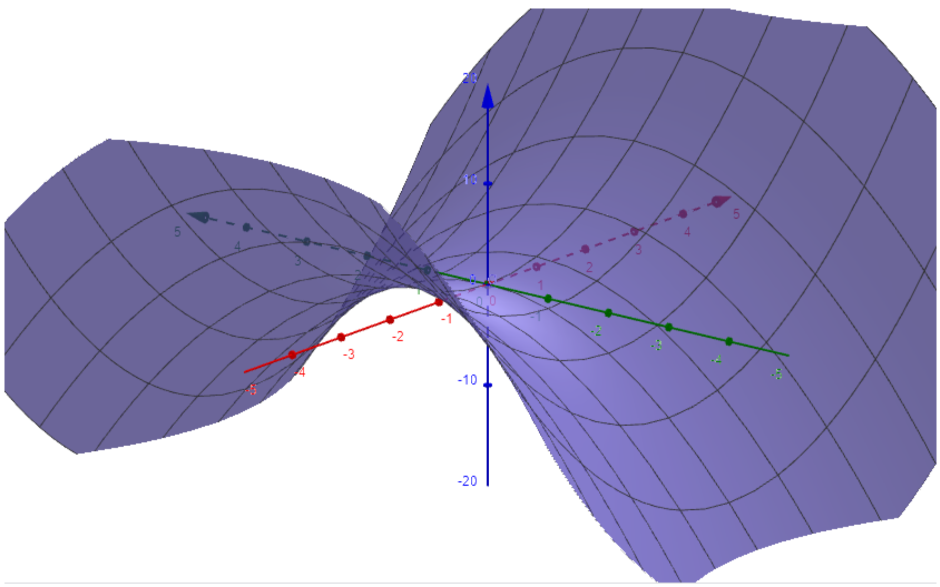

FIGURE 27.9 – Un point selle, animation disponible à `https://www.geogebra.org/3d/n9e7jnbq`