BCPST1A – Équations différentielles linéaires : fiche de révision

Cette fiche est donnée à titre indicatif: elle ne dispense pas d'apprendre le cours, mais peut servir de base pour faire votre ***propre*** *fiche - éventuellement plus complète.*

1) 1er ordre à coefficients constants

Définition. On appelle EDL du 1er ordre à coefficients constants une équation du type :

$$(E) \quad ay'(x) + by(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$), f est continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (second membre), et $y : I \to \mathbb{R}$ est dérivable (inconnue).

Résoudre (E) = trouver **TOUTES** les solutions sur I.

Équation homogène associée :

$$(H) \quad ay'(x) + by(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

POINT METHODE 1 (en 3 étapes)
1) Calculer **TOUTES** les solutions de (H).
2) Exhiber **UNE** solution particulière y_0 de (E).
3) Synthèse : **toutes** les solutions de (E) sont $\boxed{y = y_0 + y_H}$.

1.1 Résolution de (H)

Proposition. On note S_H l'ensemble des solutions de (H). Alors

$$\boxed{S_H = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto K e^{-\frac{b}{a}x} \end{array} , \ K \in \mathbb{R} \right\}}.$$

1.2 Solution particulière : variation de la constante

Si f est constante : on teste une solution **constante** $y_0 = k$. Alors $y_0' = 0$ et (E) donne $bk = f$ (donc si $b \neq 0$, $k = \frac{f}{b}$).

Si f n'est pas constante : méthode de la variation de la constante.

1. On fait varier la constante dans les solutions de (H) : on cherche y_0 sous la forme
$$y_0(x) = K(x) e^{-\frac{b}{a}x},$$
où K est une fonction dérivable sur I.
2. On utilise que y_0 est solution de (E) :
(après calcul, *les termes en $K(x)$ doivent s'annuler* !)
$$ay_0'(x) + by_0(x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad K'(x) = \frac{f(x)}{a} e^{\frac{b}{a}x}.$$
3. On détermine **une** primitive de K' (pas de constante ici, car on ne veut qu'**UNE** solution particulière).

1.3 Superposition + synthèse

Remarque (principe de superposition).
Si $f = f_1 + \cdots + f_n$ et si $y_1, \ldots, y_n$ sont des solutions particulières de $ay' + by = f_1, \ldots, ay' + by = f_n$, alors $y_1 + \cdots + y_n$ est une solution particulière de $ay' + by = f$.

Proposition. Toute solution y de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de (H). En d'autres termes, notant S_E l'ensemble des solutions de (E) et y_0 une solution particulière :

$$\boxed{\begin{aligned} S_E &= \{y_0 + y_H \ , \ y_H \text{ solution de (H)}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y_0(x) + K e^{-\frac{b}{a}x} \end{array} , \ K \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}}$$

---

2) 1er ordre à coefficients non constants

Généralisation. On s'intéresse aux équations du type :

$$(E) \quad y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

où b, f sont continues sur I (à valeurs réelles) et $y : I \to \mathbb{R}$ est dérivable.

Équation homogène associée :

$$(H) \quad y'(x) + b(x)y(x) = 0.$$

2.1 Résolution de (H)

Proposition. On note S_H l'ensemble des solutions de (H). Alors :

$$\boxed{S_H = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto K e^{-B(x)} \end{array} , \ K \in \mathbb{R} \right\}}$$

où B est une primitive de b sur I.

2.2 Solution particulière : encore variation de la constante

On cherche une solution particulière y_0 sous la forme

$$y_0(x) = K(x) e^{-B(x)} \qquad (K \text{ dérivable, définie sur } I).$$

En imposant que y_0 vérifie (E), on obtient (refaire à chaque fois le calcul):

$$\boxed{K'(x) = f(x) e^{B(x)}}.$$

Puis on prend une primitive de K' pour obtenir K (une primitive suffit).

2.3 Synthèse

Proposition. Toute solution y de (E) est la somme d'une solution particulière y_0 et d'une solution de (H).
Donc, avec S_E l'ensemble des solutions de (E) :

$$\boxed{\begin{aligned} S_E &= \{y_0 + y_H \ , \ y_H \text{ solution de (H)}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y_0(x) + K e^{-B(x)} \end{array} , \ K \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}}$$

Remarque : la superposition reste valable.

---

3) 2e ordre à coefficients constants

Définition. Une EDL du 2e ordre à coefficients constants est :

$$(E) \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) \quad \forall x \in I,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, f est continue sur I et y est **deux fois dérivable**.

Équation homogène associée :

$$(H) \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

POINT METHODE 2 (2e ordre)
1) Résoudre (H) avec l'équation caractéristique.
2) Trouver **UNE** solution particulière y_0 de (E).
(La variation de la constante n'est pas au programme au 2e ordre.)
On se limite aux cas usuels : f constante ; $f(x) = P(x)e^{mx}$; $f(x) = \sin(\omega x)$ ou $\cos(\omega x)$.
(Souvent la forme de y_0 est donnée, sauf quand f est constante.)
3) Synthèse : $y = y_0 + y_H$.

3.1 Résolution de (H) : équation caractéristique

Définition. L'équation caractéristique associée à (H) est :

$$ar^2 + br + c = 0, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Proposition. On note S_H l'ensemble des solutions de (H).

- Si $\Delta > 0$: racines réelles $r_1 \neq r_2$

$$S_H = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array} , \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta = 0$: racine double r

$$S_H = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx} \end{array} , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Si $\Delta < 0$: racines $\alpha \pm i\omega$ $(\omega > 0)$

$$S_H = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\alpha x}\big(\lambda_1 \cos(\omega x) + \lambda_2 \sin(\omega x)\big) \end{array} , \ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3.2 Formes classiques pour y_0

(i) Si f est constante : on teste $y_0 = k$ constant.
Alors $y_0' = y_0'' = 0$ et (E) donne $ck = f$. Si $c \neq 0$, on peut prendre

$$\boxed{y_0 = \frac{f}{c}}.$$

(si $c = 0$, il faut adapter : essayer Ax ou Ax^2 selon le cas.)
(ii) Si $f(x) = P(x)e^{mx}$: on cherche

$$y_0(x) = R(x)e^{mx}$$

où R est un polynôme à déterminer, avec la règle :

- si m n'est pas racine de l'équation caractéristique : $\deg R = \deg P$;
- si m est racine **simple** : $\deg R = \deg P + 1$;
- si m est racine **double** : $\deg R = \deg P + 2$.

POINT METHODE 3 : on remplace y_0 dans (E) et on fait une **identification** des coefficients.
(iii) Si $f(x) = \sin(\omega x)$ ou $\cos(\omega x)$:

$$y_0(x) = \lambda \sin(\omega x) + \mu \cos(\omega x)$$

ou

$$y_0(x) = \lambda x \sin(\omega x) + \mu x \cos(\omega x).$$

(Le facteur x apparaît quand on est "en résonance" avec y_H.)

3.3 Synthèse

Proposition (admise). Toute solution de (E) est de la forme

$$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_0(x)}.$$

Avec des conditions initiales : on les utilise à la fin pour déterminer les constantes.