Corrigé des exercices

12.1 Fractions

Éléments de correction - Exercice 1

1. *Il faut commencer par mettre les fractions au même dénominateur. Attention, le « meilleur » dénominateur n'est pas toujours le produit des dénominateurs des fractions. Ici, il faut par exemple éviter de choisir 5×25 comme dénominateur commun (car les calculs deviennent rapidement compliqués !).*
   On a $A = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{25} = \dfrac{4 \times 5}{5 \times 5} + \dfrac{3}{25} = \dfrac{20}{25} + \dfrac{3}{25} = \dfrac{23}{25}$.
2. $B = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3} = \dfrac{5}{3}$.
3. $C = \dfrac{5 \times 2}{24} + \dfrac{11}{24} = \dfrac{10}{24} + \dfrac{11}{24} = \dfrac{21}{24} = \dfrac{3 \times 7}{3 \times 8} = \dfrac{7}{8}$.
4. *Pour ajouter plus de deux fractions, on procède de manière similaire et on commence par mettre les fractions au même dénominateur.*
   $D = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2 \times 3}{2 \times 2 \times 3} + \dfrac{2 \times 2}{2 \times 2 \times 3} + \dfrac{3}{2 \times 2 \times 3} = \dfrac{6}{12} + \dfrac{4}{12} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{13}{12}$.
5. *Quand on a des parenthèses, il faut respecter les priorités calculatoires. Ici, les parenthèses sont inutiles car nous n'avons que des sommes à effectuer, mais si elles apparaissent c'est peut-être pour nous guider dans les calculs.*
   $E = \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{10}{5}\right) + \left(\dfrac{2}{15} + \dfrac{45}{15}\right) + \dfrac{3}{10} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{47}{15} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{72 + 94 + 9}{30} = \dfrac{175}{30} = \dfrac{35}{6}$.
6. $F = \dfrac{a + 3a + 6a}{5} = \dfrac{10a}{5} = 2a$.
7. $G = \dfrac{11a + 5a + 33a + 6a}{11} = \dfrac{55a}{11} = 5a$.

Éléments de correction - Exercice 2

1. $A = \dfrac{4}{6} - \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{6}$.
2. *Avant de se lancer dans des calculs compliqués, il peut être utile de voir si les fractions peuvent se simplifier !*
   $B = \dfrac{15}{30} - \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2 - 1}{4} = \dfrac{1}{4}$.
3. *Le « meilleur » dénominateur commun est le plus petit commun multiple des dénominateurs. Pour le déterminer, on peut commencer par décomposer les dénominateurs en facteurs premiers :* $12 = 2 \times 2 \times 3$ *et* $18 = 2 \times 3 \times 3$. *On constate alors que le plus petit commun multiple à ces deux nombres est* $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.
   $C = \dfrac{5 \times 3}{12 \times 3} - \dfrac{7 \times 2}{18 \times 2} = \dfrac{15 - 14}{36} = \dfrac{1}{36}$.
4. $D = \dfrac{4 \times 4 - 11}{100} = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$.
5. $E = \dfrac{7 \times 15 - 13}{15} = \dfrac{92}{15}$.
6. $F = 3 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \times 4 - 3}{4} = \dfrac{9}{4}$.
7. $G = \dfrac{25 - 3 \times 6}{6} = \dfrac{7}{6}$.

Éléments de correction - Exercice 3

1. $A = \frac{3}{9} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3 \times 2 + 9 + 5 \times 3}{18} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$.
2. $B = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{2 \times 36 + 3 \times 45 + 5 \times 20}{180} = \frac{307}{180}$.
3. *Attention à bien distribuer le signe dans une parenthèse !*
$C = \frac{60}{30} - \frac{14}{30} + \frac{3}{30} = \frac{49}{30}$.
4. *On commence par réorganiser les termes pour faciliter le calcul.*
$D = 5 - 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{7}{9} - \frac{5}{6} = 2 + \frac{2}{4} + \frac{14-15}{18} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{36+9-1}{18} = \frac{44}{18} = \frac{22}{9}$.
5. $E = \frac{9a - 2a}{7} = \frac{7a}{7} = a$.
6. $F = \frac{11a - 5a}{5} = \frac{6a}{5}$.
Notons que l'énoncé est un peu imprécis ici : pour être certain que la fraction soit irréductible, il faut que $6a$ *ne soit pas divisible par* 5 *(ce qui revient à dire que* a *ne doit pas être divisible par* 5*).*
7. $G = \frac{20a - 2a + 9a}{30b} = \frac{27a}{30b} = \frac{9a}{10b}$.
Notons que l'énoncé est un peu imprécis ici : pour être certain que la fraction soit irréductible, il faut que $9a$ *et* $10b$ *n'aient pas de multiples communs !*

Éléments de correction - Exercice 4

1. $A = \frac{13}{5} \times 5 = 13$.
2. $B = \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{2 \times 9}{3 \times 4} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 2} = \frac{3}{2}$. *Notons qu'ici on n'a pas fait directement les produits* 2×9 *et* 3×4*, on a d'abord chercher à simplifier les fractions (ce qui facilite beaucoup les calculs !).*
3. $C = \frac{21}{5} \times \frac{15}{7} = \frac{3 \times 7 \times 3 \times 5}{5 \times 7} = 3 \times 3 = 9$.
4. $D = \frac{12}{20} \times \frac{35}{9} = \frac{3 \times 4 \times 7 \times 5}{4 \times 5 \times 3 \times 3} = \frac{7}{3}$.
5. $E = 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) = 5 \times \frac{2}{3} + 5 \times \frac{1}{4} + 3 = \frac{5 \times 2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{5 \times 3}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3 \times 4}{3 \times 4} = \frac{40 + 15 + 36}{12} = \frac{91}{12}$.
6. $F = 6 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{6 \times 4}{5} + \frac{6 \times 2}{3} + \frac{6}{2} = \frac{24}{5} + 4 + 3 = \frac{24}{5} + \frac{4 \times 5}{5} + \frac{3 \times 5}{5} = \frac{24 + 20 + 15}{5} = \frac{59}{5}$.
7. $G = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3 \times 3}{4} - 2 = \frac{9 - 2 \times 4}{4} = \frac{1}{4}$.
8. $H = \left(4 - \frac{3}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5 \times 5 - 3}{5} \times \frac{3-2}{3} = \frac{17}{15}$.
9. $I = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) = \frac{b+a}{a} \times \frac{b-a}{b} = \frac{(a+b)(b-a)}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{ab}$.

Éléments de correction - Exercice 5

1. $A = \frac{5 + \frac{1}{4}}{7} = \frac{1}{7}\left(5 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{7} \times \frac{5 \times 4 + 1}{4} = \frac{21}{7 \times 4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{3}{4}$.
Il faut être vigilant quand on place le symbole « = », qui doit être au même niveau que la barre de fraction principale. En effet, en règle générale, $\frac{a}{\frac{b}{c}} \neq \frac{\frac{a}{b}}{c}$ *(essayez de faire le calcul pour* $a = 1$*,* $b = 2$ *et* $c = 3$ *par exemple ;* $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ *tandis que* $\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$*).*
2. $B = \frac{8 + \frac{3}{4}}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{8 \times 4 + 3}{4} = \frac{35}{5 \times 4} = \frac{7 \times 5}{5 \times 4} = \frac{7}{4}$.

3. $C=\dfrac{5+\frac{6}{9}}{17}=\dfrac{1}{17}\times\dfrac{5\times 9+6}{9}=\dfrac{51}{17\times 9}=\dfrac{17\times 3}{17\times 3\times 3}=\dfrac{1}{3}.$
4. $D=\dfrac{7+\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}=9\times\left(7+\dfrac{2}{3}\right)=9\times 7+9\times\dfrac{2}{3}=63+6=69.$
5. $E=\dfrac{3+\frac{7}{9}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{8}{3}\times\left(3+\dfrac{7}{9}\right)=8+\dfrac{8\times 7}{3\times 9}=\dfrac{8\times 27+56}{27}=\dfrac{216+56}{27}=\dfrac{272}{27}.$
6. $F=\dfrac{4+\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\dfrac{8}{3}\times\left(4+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{8}{3}\times\dfrac{4\times 4+1}{4}=\dfrac{8\times 17}{3\times 4}=\dfrac{4\times 2\times 17}{3\times 4}=\dfrac{34}{3}.$
7. $G=6\times\left(3+\dfrac{4}{9}\right)=18+\dfrac{6\times 4}{9}=18+\dfrac{3\times 2\times 4}{9}=18+\dfrac{8}{3}=\dfrac{3\times 18+8}{3}=\dfrac{62}{3}.$

Éléments de correction - Exercice 6

1. $A=\dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{(1+\frac{1}{a})\cdot a}{=}\dfrac{1}{a+1}.$
2. $B=\dfrac{\frac{5}{2}}{10+\frac{5}{2}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{2\times 10+5}{2}}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{2}}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{2}{25}=\dfrac{5\times 2}{2\times 5\times 5}=\dfrac{1}{5}.$
   Attention, $\dfrac{5}{2}$ qui apparaît au numérateur et au dénominateur ne peut pas être simplifié, car on a des somme et pas des produits.
3. $C=\dfrac{a}{\frac{ab+3b^2}{2}}\cdot\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{a\times b}{(ab+3b^2)\times 2a}=\dfrac{2\times a\times b}{2\times a\times b\times(a+3b)}=\dfrac{1}{a+3b}.$
4. $D=\dfrac{1}{\frac{8}{75}-\frac{5}{12}}=\dfrac{1}{\frac{8}{3\times 25}-\frac{5}{3\times 4}}=\dfrac{1}{\frac{8\times 4-5\times 25}{3\times 4\times 25}}=\dfrac{1}{\frac{32-125}{300}}=\dfrac{1}{\frac{-93}{300}}=-\dfrac{300}{93}=-\dfrac{100}{31}.$

Éléments de correction - Exercice 7

1. $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{25}{45}=\dfrac{5}{9}.$
2. Avec les produits en croix : $12\times 12>10\times 11$, donc $\dfrac{12}{11}>\dfrac{10}{12}$. Ou plus simplement, on voit sans calcul que $\dfrac{12}{11}>1$ et que $\dfrac{10}{12}<1$, ce qui permet de retrouver la relation de comparaison.
3. $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}.$

Éléments de correction - Exercice 8

On sait que $A=B$ si et seulement si $33\ 125\times 208\ 341=66\ 317\times 104\ 348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est donc impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est donc pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée : A et B ne sont pas égaux.

Éléments de correction - Exercice 9

On a $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. On utilise les produits en croix :

$$(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1 \quad\text{et}\quad (10^6+1)^2=10^{12}+2\times 10^6+1.$$

Ainsi on a $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)^2$, d'où $A>B$.

12.2 Puissances

Éléments de correction - Exercice 10

1. $A^1 = A^2 = A^3 = A^4 = 1$.
2. $B^1 = (-1)^1 = -1$, $B^2 = (-1)^2 = 1$, $B^3 = (-1)^3 = -1$ et $B^4 = (-1)^4 = 1$.
3. $C^1 = 2^1 = 2$, $C^2 = 2^2 = 4$, $C^3 = 2^3 = 8$ et $C^4 = 2^4 = 16$.
4. $D^1 = (-2)^1 = -2$, $D^2 = (-2)^2 = 4$, $D^3 = (-2)^3 = -8$ et $D^4 = (-2)^2 = 16$.
5. $E^1 = 3^1 = 3$, $E^2 = 3^2 = 9$, $E^3 = 3^3 = 27$ et $E^4 = 3^4 = 81$.
6. $F^1 = (-3)^1 = -3$, $F^2 = (-3)^2 = 9$, $F^3 = (-3)^3 = -27$ et $F^4 = (-3)^4 = 81$.

Éléments de correction - Exercice 11

1. $(-2)^3 2^2 = -8 \times 4 = -32$.
2. $(-5)^2(-5) = -125$.
3. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}\left(-\frac{8}{27}\right) = -\frac{32}{243}$.
4. $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^3} = \frac{27}{64}$.
5. $\frac{3^2}{5^2}\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{3^2 \times 2^2}{5^2 \times 3^2} = \frac{5 \times 4}{25 \times 9^2} = \frac{4}{225}$.
6. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{2^{14} \times 5}{3 \times 2} = \frac{40}{3}$.
7. $a^2 \cdot a^4 = a^6$.
8. $a^4 \cdot a^3 = a^7$.
9. $a^5 \cdot a = a^6$.
10. $-a^3(-a)^5 = -a^3(-1)^5 a^5 = a^3 a^5 = a^8$.
11. $\left(2^2\right)^3 = 2^6 = 64$.
12. $\left((-3)^2\right)^3 = \left(3^2\right)^3 = 3^6 = 729$.
13. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 = \frac{1}{\left(2^2\right)^3} = \frac{1}{64}$.
14. $\left(\left(-\frac{2}{5}\right)^3\right)^2 = \left((-1)^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^2 = \left(-\frac{2^3}{5^3}\right)^2 = (-1)^2\frac{2^6}{5^6} = \frac{64}{15\ 625}$.
15. $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \frac{3^6}{2^6} = \frac{729}{64}$.
16. $\left(-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^3 = (-1)^3\frac{5^6}{2^6} = -\frac{15\ 625}{64}$.
17. $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right)^3 = -\frac{1}{3^9} = -\frac{1}{19\ 683}$
18. $\left((-3)^3 \cdot 5^2\right)^2 = 3^6 5^4 = 455\ 625$.
19. *Quand on a des fractions avec des puissances, il faut déjà chercher à simplifier les puissances avant de les calculer.*
$\left(3^3\left(-\frac{1}{6}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{3^3}{(2 \times 3)^2}\right)^2 = \left(\frac{3^3}{2^2 \cdot 3^2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.
20. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^4}\right)^4 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$.
21. $\left((-2) \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right)^2 = \left(-2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{5^4}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}$.

22. $\left(-27\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^2 = \left(-3^3\dfrac{2^3}{3^3}\dfrac{1}{2^2}\right)^2 = 4.$

Éléments de correction - Exercice 12

1. $\dfrac{(-a)^5}{a^3} = \dfrac{(-1)^5a^5}{a^3} = -a^2.$
2. $\dfrac{(-a)^6}{(-a)^3} = (-a)^3 = -a^3.$
3. $\dfrac{(-a)^9}{-a} = (-a)^8 = a^8.$
4. $\dfrac{(-a)^{2022}}{a} = \dfrac{a^{2022}}{a} = a^{2021}.$
5. $a^3 \cdot a^{-5} = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}.$
6. $a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{-5} = \dfrac{1}{a^5}.$
7. $a^{-2} \cdot a^4 = a^2.$
8. $a^2a^{-1} = a.$
9. $\dfrac{a^3}{a^{-5}} = a^3 \cdot a^5 = a^8.$
10. $\dfrac{a^{-4}}{a^{-2}} = a^{-4}a^2 = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}.$
11. $\dfrac{a^4}{a^{-3}} = a^4a^3 = a^7.$
12. $\dfrac{a^{-3}}{a^{-4}} = a^{-3}a^4 = a.$

Éléments de correction - Exercice 13

1. $\dfrac{1}{(-2)^{-1}} = -2.$
2. $-\dfrac{1}{5^{-1}} = -5.$
3. $-\dfrac{1}{6^{-3}} = -6^3 = -216.$
4. $\dfrac{1}{6^3} = \dfrac{1}{216}.$
5. $(-1)^3 2^{-2} 3^3 = -\dfrac{27}{4}.$
6. $(-3)^{-1} \cdot 6^2 \cdot 4^{-1} = -\dfrac{1}{3}(3^2 \times 2^2)\dfrac{1}{2^4} = -\dfrac{3}{4}.$
7. $10^{-5} \cdot 10^3 = 10^{-2} = \dfrac{1}{100}.$
8. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}(-1)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{2}{3}\dfrac{3^3}{2^6} = \dfrac{3^2}{2^5} = \dfrac{9}{32}.$
9. $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-1} = -\dfrac{5^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 2^2} = -\dfrac{1\ 125}{16}.$
10. $\left(\dfrac{4}{7}\right)^3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{-3} = \dfrac{4^3 \cdot 2^3 \cdot 7^6}{783^3 \cdot 3^3} = \dfrac{2^9}{3^9} = \dfrac{512}{19\ 683}.$
11. $\dfrac{25^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{30^6} = \dfrac{\left(5^2\right)^3 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{5^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6} = \dfrac{5^6 \cdot 2^7 \cdot 3^5}{5^6 \cdot 2^6 \cdot 3^6} = \dfrac{2}{3}.$
12. $\dfrac{9^{-2} \cdot 4^2}{3^{-3} \cdot 6^{-2}} = \dfrac{\left(3^2\right)^{-2} \cdot \left(2^2\right)^2}{3^{-3} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-2}} = \dfrac{3^{-6} \cdot 2^4}{3^{-5} \cdot 2^{-2}} = \dfrac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 3^5}{3^6} = \dfrac{2^6}{3^6} = \dfrac{64}{729}.$

13. $\dfrac{49^{-2}\cdot 5^6\cdot 2^3}{7^{-3}\cdot 125^3\cdot 12}=\dfrac{\left(7^2\right)^{-2}\cdot 5^6\cdot 2^3}{7^{-3}\cdot\left(5^{-3}\right)^3\cdot 2^2\cdot 3}=\dfrac{7^{-4}\cdot 5^6\cdot 2^3}{7^{-3}\cdot 5^3\cdot 2^2\cdot 3}=\dfrac{7^3\cdot 5^6\cdot 2^3}{7^4\cdot 5^3\cdot 2^2\cdot 3}=\dfrac{2}{7\cdot 5^3\cdot 3}=\dfrac{2}{2\ 625}.$

14. $\dfrac{4^2\cdot(-12)^2}{(-2)^3\cdot 6^{-2}\cdot 3^3}=\dfrac{2^4\cdot 3^2\cdot 4^2}{-2^3\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^3}=-\dfrac{2^4\cdot 3^2\cdot 2^4}{2\cdot 3}=-2^7\cdot 3=-384.$

15. $\dfrac{10^{-5}\cdot 25^3}{(-1)^{2022}\cdot 2^{-4}}=\dfrac{2^{-5}\cdot 5^{-5}\cdot 5^6}{2^{-4}}=\dfrac{5}{2}.$

Éléments de correction - Exercice 14

1. $\dfrac{4^3}{2^8}=\dfrac{\left(2^2\right)^3}{2^8}=\dfrac{2^6}{2^8}=\dfrac{1}{4}.$

2. $\dfrac{25^3}{(-5)^6}=\dfrac{\left(5^2\right)^3}{(-1)^6\cdot 5^6}=\dfrac{5^6}{5^6}=1.$

3. $\dfrac{9^{-1}}{3^{-2}}=\dfrac{3^2}{9}=1.$

4. $\dfrac{4^{65}}{2^{128}}=\dfrac{\left(2^2\right)^{65}}{2^{128}}=\dfrac{2^{130}}{2^{128}}=2^{130-128}=2^2=4.$

5. $\dfrac{8^{-5}}{64^{-3}}=\dfrac{\left(8^2\right)^3}{8^5}=\dfrac{8^6}{8^5}=8.$

6. $\dfrac{12^{-4\ 027}}{164^{-2\ 014}}=\dfrac{\left(12^2\right)^{2\ 014}}{12^{4\ 027}}=\dfrac{12^{4\ 028}}{12^{4\ 027}}=12.$

7. $\dfrac{2^{2n}}{4^n}=\dfrac{2^{2n}}{\left(2^2\right)^n}=\dfrac{2^{2n}}{2^{2n}}=1.$

8. $\dfrac{3^{3n}}{\left(3^3\right)^{3n+1}}=\dfrac{3^{3n}}{3^{3n+3}}=\dfrac{1}{3^{3n+3-3n}}=\dfrac{1}{3^{6n+3}}.$

9. $\dfrac{125^{n+1}}{5^{3n-1}}=\dfrac{\left(5^3\right)^{n+1}}{5^{3n-1}}=5^{3n+3-(3n-1)}=5^4=625.$

10. $\dfrac{144^{n-1}}{12^{2(n+1)}}=\dfrac{144^{n-1}}{144^{n+1}}=\dfrac{1}{144^{n+1-n+1}}=\dfrac{1}{144^2}=\dfrac{1}{20\ 736}.$

Éléments de correction - Exercice 15

1. $A=\dfrac{2}{15}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{3\times 5}+\dfrac{3}{2\times 5}=\dfrac{2\times 2}{2\times 3\times 5}+\dfrac{3\times 3}{2\times 3\times 5}=\dfrac{4+9}{30}=\dfrac{13}{30}.$

2. $B=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{2\times 3}+\dfrac{2}{2\times 3}=\dfrac{2+3}{6}=\dfrac{5}{6}.$

3. $C=\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\times 3}{3\times 4}+\dfrac{2\times 4}{2\times 4}=\dfrac{9+8}{8}=\dfrac{17}{12}.$

4. $D=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{3}{3\times 20}+\dfrac{2}{2\times 30}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{2+3}{60}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{5}{60}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{1}{2^2\times 3}+\dfrac{1}{2\times 3\times 7}=\dfrac{7}{2^2\times 3\times 7}+\dfrac{2}{2^2\times 3\times 7}=\dfrac{7+2}{84}=\dfrac{3\times 3}{28\times 3}=\dfrac{3}{28}.$

5. $E=\left(\dfrac{4}{9}+2\right)+\dfrac{2}{3}+\left(2+\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{4+2\times 9}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2\times 12+1}{12}=\dfrac{22}{9}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{25}{12}=\dfrac{22+3\times 2}{9}+\dfrac{25}{12}=\dfrac{28}{9}+\dfrac{25}{12}=\dfrac{28\times 4+25\times 3}{36}=\dfrac{187}{36}.$

6. $F=3a+\dfrac{4a}{7}+\dfrac{a}{14}=\dfrac{14\times 3a+2\times 4a+a}{14}=\dfrac{51a}{14}.$

7. $G=\dfrac{3a}{2b}+\dfrac{a}{3b}+\dfrac{5a}{2b}+\dfrac{2a}{3b}=\dfrac{3\times 3a+2\times a+3\times 5a+2\times 2a}{6b}=\dfrac{30a}{6b}=\dfrac{5a}{b}.$

Éléments de correction - Exercice 16

1. $A = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} - \frac{2 \times 4}{4 \times 5} = \frac{15 - 8}{20} = \frac{7}{20}$.
2. $B = \frac{3 \times 6}{2 \times 6} - \frac{3 \times 5}{2 \times 5} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$. *Quand on peut simplifier des fractions, on le fait immédiatement !*
3. $C = \frac{17}{60} - \frac{17}{75} = \frac{17}{2^2 \times 3 \times 5} - \frac{17}{3 \times 5^2} = \frac{17 \times 5}{2^2 \times 3 \times 5^2} - \frac{17 \times 2^2}{2^2 \times 3 \times 5^2} = \frac{85 - 68}{300} = \frac{17}{300}$.
4. $D = 2 - \frac{11}{8} = \frac{2 \times 8}{8} - \frac{11}{8} = \frac{16 - 11}{8} = \frac{5}{8}$.
5. $E = \frac{52}{15} - 3 = \frac{52}{15} - \frac{3 \times 15}{15} = \frac{52 - 45}{15} = \frac{7}{15}$.
6. $F = 5 - \frac{17}{5} = \frac{5 \times 5 - 17}{5} = \frac{8}{5}$.
7. $G = \frac{13}{4} - 2 = \frac{13 - 2 \times 4}{4} = \frac{5}{4}$.

12.3 Racines carrées

Éléments de correction - Exercice 17

1. $\sqrt{1000} = \sqrt{10 \times 100} = \sqrt{100}\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$.
2. $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{27} \cdot \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$.
4. $\sqrt{30^{50}} = \sqrt{(30^{15})^2} = 30^{25}$.
5. $\sqrt{5}\sqrt{45} = \sqrt{5}\sqrt{9 \times 5} = 3(\sqrt{5})^2 = 15$.
6. $\sqrt{27^3} = \sqrt{(3^3)^3} = \sqrt{3^9} = \sqrt{3 \times 3^8} = 3^4\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$.
7. $(\sqrt{8})^5 = (\sqrt{8})^2(\sqrt{8})^2\sqrt{8} = 64\sqrt{8} = 64\sqrt{4 \times 2} = 128\sqrt{2}$.
8. $\sqrt{8}\sqrt{162} = 2\sqrt{2}\sqrt{81 \times 2} = 2 \times 9\sqrt{2}\sqrt{2} = 72$.
9. $\sqrt{(-1)^4} = \sqrt{1} = 1$.
10. $\sqrt{(-2)^3(-18)} = \sqrt{2^3 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{2^4 3^2} = 2^2 3 = 12$.
11. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$.
12. $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{27}{50}} = \sqrt{\frac{2^5 3^3}{3^5 5^2 2}} = \sqrt{\frac{2^4}{3^2 5^2}} = \frac{2^2}{3 \times 5} = \frac{4}{15}$.

Éléments de correction - Exercice 18

1. Puisqu'une racine carrée est toujours positive, $\sqrt{7} \geq 0$.
2. Puisqu'une racine carrée est toujours positive, $\sqrt{\sqrt{5}} \geq 0$.
3. On a $2 \leq 3$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{2} \leq \sqrt{3}$ puis $\sqrt{2} - \sqrt{3} \leq 0$.
4. On a $2\ 022 \geq 2\ 021$ donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{2\ 022} \geq \sqrt{2\ 021}$, puis $\sqrt{2\ 022} - \sqrt{2\ 021} \geq 0$.
5. $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ est positif en tant que somme de nombres positifs.
6. On a $11 \geq 9$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{11} \geq \sqrt{9}$, puis $\sqrt{11} \geq 3$. En particulier, $\sqrt{11} \geq 2$, puis $\sqrt{11} - 2 \geq 0$.
7. On a $5 \geq 4$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{5} \geq \sqrt{4}$, puis $\sqrt{5} \geq 2$. Ainsi, $\sqrt{5} - 2 \geq 0$.
8. $2 + \sqrt{5}$ est positif en tant que somme de nombres positifs.

Éléments de correction - Exercice 19

1. $\sqrt{(-5)^2} = 5$.
2. $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$ car $\sqrt{3} \geq \sqrt{1} = 1$.
3. $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2$ car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.
4. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = -(2-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-2$ car $\sqrt{7} \geq \sqrt{4} = 2$.
5. $\sqrt{(3-\pi)^2} = \pi - 3$ car $\pi \geq 3$.
6. $\sqrt{(3-a)^2} = |3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leq 3$ et $a-3$ si $a \geq 3$.

Éléments de correction - Exercice 20

1. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \dfrac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2^2-\sqrt{2}^2} = \dfrac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} = 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
2. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1} = 3-2\sqrt{2}$.
3. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \dfrac{2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-3+\sqrt{10}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$.
4. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$.
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
6. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$.
7. $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$.
8. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = 50-25\sqrt{3}$.

Éléments de correction - Exercice 21

1. *La méthode avec la forme conjuguée fonctionne ici, c'est la plus rapide pour montrer l'égalité demandée.*
   Il faut faire attention à la rédaction quand on veut montrer que $A = B$ (où A et B sont deux expressions réelles). On dispose essentiellement de trois méthodes.
   (a) *On commence avec A, qu'on transforme jusqu'à retomber sur B. Le schéma de rédaction est alors le suivant :*
   $$\begin{aligned} A &= \dots \\ &= \dots \\ &= B. \end{aligned}$$
   (b) *On commence avec B, qu'on transforme jusqu'à retomber sur A. Le schéma de rédaction est alors le suivant :*
   $$\begin{aligned} B &= \dots \\ &= \dots \\ &= A. \end{aligned}$$

(c) *On simplifie le plus possible $A - B$ jusqu'à obtenir zéro. Le schéma de rédaction est alors le suivant :*

$$\begin{aligned} A - B &= \dots \\ &= \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

On utilise la méthode **(a)**. $2-\sqrt{3} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{4-(\sqrt{3})^2}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.

2. On a $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 = 3+2\sqrt{2}$ et $(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$. Donc $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 = (1+\sqrt{2})^2$. Or $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \geqslant 0$ et $1+\sqrt{2} \geqslant 0$ donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

3. On a $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = 5-2\sqrt{6}$ et $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{3}\sqrt{\ }+2 = 5-2\sqrt{6}$, donc $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$. Or $\sqrt{5-2\sqrt{6}} \geq 0$ et $\sqrt{3}-\sqrt{2} \geq 0$, donc $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Éléments de correction - Exercice 22

1. $A = \dfrac{3}{1000} \times 100 = \dfrac{3}{10}$.
2. $B = \dfrac{3\pi}{4} \times \dfrac{6}{\pi} = \dfrac{3\times\pi\times 2\times 3}{2\times 2\times\pi} = \dfrac{9}{2}$.
3. $C = \dfrac{121}{22} \times \dfrac{4}{55} = \dfrac{11\times 11\times 2\times 2}{2\times 11\times 5\times 11} = \dfrac{2}{5}$.
4. $D = \dfrac{144}{125} \times \dfrac{75}{16} = \dfrac{2^4\times 3^2\times 3\times 5^2}{5^3\times 2^4} = \dfrac{3^3}{5} = \dfrac{27}{5}$. *Connaître par cœur les carrés des premiers entiers naturels est très utile. Par exemple, on a utilisé $11^2 = 121$ à la question précédente, et $12^2 = 144$ ici.*
5. $E = 3\cdot\left(\dfrac{6}{9}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{7}\right) = \dfrac{3\times 6}{9} + \dfrac{3}{5} + \dfrac{3\times 2}{7} = 2 + \dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{7} = \dfrac{2\times 5+3}{5} + \dfrac{6}{7} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{6}{7} = \dfrac{13\times 7+6\times 5}{7\times 5} = \dfrac{121}{35}$.
6. $F = 7\cdot\left(\dfrac{4}{14}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{9}\right) = \dfrac{7\times 2\times 2}{2\times 7} + \dfrac{7}{3} + \dfrac{7\times 7}{9} = 2 + \dfrac{7}{3} + \dfrac{49}{9} = \dfrac{2\times 3+7}{3} + \dfrac{49}{9} = \dfrac{13}{3} + \dfrac{49}{9} = \dfrac{3\times 13+49}{9} = \dfrac{88}{9}$.
7. $G = \left(5+\dfrac{3}{8}\right)\left(1+\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{5\times 8+3}{8} \times \dfrac{1\times 8+5}{8} = \dfrac{43}{8} \times \dfrac{13}{8} = \dfrac{43\times 13}{8^2} = \dfrac{559}{64}$.
8. $H = \left(\dfrac{7}{15}-\dfrac{4}{30}\right)\cdot\left(6+\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{7\times 2-4}{30} \times \dfrac{6\times 4+3}{4} = \dfrac{10}{30} \times \dfrac{27}{4} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\times 9}{4} = \dfrac{9}{4}$.

Éléments de correction - Exercice 23

1. $10^5 \cdot 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$.
2. $(10^5)^3 = 10^{5\times 3} = 10^{15}$.
3. $\dfrac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$.
4. $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-5-(-3)} = 10^{-2}$.
5. $\dfrac{(10^5\cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5}\cdot 10^3)^{-3}} = \dfrac{(10^2)^5}{(10^{-2})^{-3}} = \dfrac{10^{10}}{10^6} = 10^4$.
6. $\dfrac{(10^3)^{-5}\cdot 10^5}{10^3\cdot 10^{-5}} = \dfrac{10^{-15}\cdot 10^5}{10^{-2}} = \dfrac{10^{-10}}{10^{-2}} = 10^{-8}$.

12.4 Développement et factorisation

Éléments de correction - Exercice 24

1. $A = \left(x^2 - x\right)(x+1) = x^2 \times x + x^2 \times 1 - x \times x - x \times 1 = x^3 + x^2 - x^2 - x = x^3 - x.$
Une fois l'expression développée, il reste à la réduire (ce qui revient à « mettre ensemble les termes en x^2 », puis les termes « en x », puis les termes constants. En général, on ordonne les puissances.
2. $B = \left(2x^2 + x - 4\right)(x+2) = 2x^3 + 4x^2 + x^2 + 2x - 4x - 8 = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 8.$
Les formules de distributivité se généralisent facilement. Ici, on a par exemple utilisé

$$(a + b + c) \times (d + e) = ad + ae + bd + be + cd + ce.$$

3. $C = \left(2x^2 + 3 - 4x\right)(2x+4) = 4x^3 + 8x^2 + 6x + 12 - 8x^2 - 16x = 4x^3 - 10x + 12.$
4. $$\begin{aligned} D &= \left(4x^3 + 5x^2 - \frac{3}{2}x\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{4x^4}{2} - \frac{4x^3}{4} + \frac{5x^3}{2} - \frac{5x^2}{4} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{8} \\ &= 2x^4 + \left(-1 + \frac{5}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)x^2 + \frac{3}{8}x \\ &= 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{8}x. \end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned} E &= (x+1)(x-2)(x-3) \\ &= (x^2 - 2x + x - 2)(x-3) \\ &= (x^2 - x - 2)(x-3) \\ &= x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x - 2x + 6 \\ &= x^3 - 4x^2 + x + 6. \end{aligned}$$
Quand on a plus de deux produits, il faut les faire les uns à la suite des autres (en réduisant au fur et à mesure pour éviter de longs calculs). Par exemple ici, on a commencé par $(x+1)(x-2)$.
6. $$\begin{aligned} F &= (3x-2)(2x+3)(5-x) \\ &= ((6x^2 + 9x - 4x - 6)(5-x) \\ &= (6x^2 + 5x - 6)(5-x) \\ &= 30x^2 + 25x - 30 - 6x^3 - 5x^2 + 6x \\ &= -6x^3 + 25x^2 + 31x - 30. \end{aligned}$$
7. $$\begin{aligned} G &= (x-a)(x+b)(x-c) \\ &= (x^2 + bx - ax - ab)(x-c) \\ &= (x^2 + (b-a)x - ab)(x-c) \\ &= x^3 - cx^2 + (b-a)x^2 - (b-a)cx - abx + abc \\ &= x^3 + (-a+b-c)x^2 + (-ab - bc + ac)x + abc. \end{aligned}$$
8. $$\begin{aligned} H &= b(x+a-b) - a(x+b-a) - a^2 - b^2 \\ &= bx + ab - b^2 - ax - ab + a^2 - a^2 - b^2 \\ &= (b-a)x - 2b^2. \end{aligned}$$
9. *Il faut être très prudent avec les parenthèses et les signes ici !*
$$\begin{aligned} I &= (x-1)(x-a+b) - (1-x)(x+a-b) - 2(x+a-b)(x-a+b) \\ &= (x^2 - ax + bx - x + a - b) - (x + a - b - x^2 - ax + bx) \\ &\quad -2(x^2 - ax + bx + ax - a^2 + ab - bx + ab - b^2) \\ &= (x^2 + (-a+b-1)x + a - b) - (-x^2 + (1-a+b)x + a - b) - 2(x^2 - a^2 + ab - b^2) \\ &= x^2 + (-a+b-1)x + a - b + x^2 - (1-a+b)x - a + b - 2x^2 + 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\ &= (-a+b-1-1+a-b)x + 2a^2 - 4ab + 2b^2 \\ &= -2x + 2a^2 + 2b^2 - 4ab. \end{aligned}$$
Notons que si on est un peu plus observateur, on peut remarquer qu'il y a une factorisation par $(x-1)$ à faire au début et on peut aussi repérer une identité remarquable de la forme $A^2 - B^2$,

ce qui simplifie grandement les calculs !

$$\begin{aligned} I &= (x-1)(x-a+b)-(1-x)(x+a-b)-2(x+a-b)(x-a+b) \\ &= (x-1)(x-a+b)+(x-1)(x+a-b)-2(x+a-b)(x-(a-b)) \\ &= (x-1)(x-a+b+x+a-b)-2(x^2-(a-b)^2) \\ &= (x-1)2x-2x^2+2(a-b)^2 \\ &= 2x^2-2x-2x^2+2a^2-4ab+2b^2 \\ &= -2x+2a^2-4ab+2b^2. \end{aligned}$$

10. $J = \left(\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\right)(4x+16a) = \frac{4x^2}{2}+\frac{16ax}{2}-\frac{4ax}{4}-\frac{16a^2}{4} = 2x^2+7ax-4a^2$.

Éléments de correction - Exercice 25

On peut s'aider d'identités remarquables pour toutes les questions de cet exercice.

1. $A=(6-3x)^2=9x^2-36x+36$.

2. $B=(1+8x)^2=64x^2+16x+1$.

3. $C=(4x+5)(5-4x)=-16x^2+25$.

4. $D=(7-4x)^2=16x^2-56x+49$.

5. $E=(-2x-9)^2=(2x+9)^2=4x^2+36x+81$.

6. $F=(6-2x)(6+2x)=-4x^2+36$.

7. $G=9x^2-8x+\frac{16}{9}$.

8. $H=\left(2x-\frac{5}{2}\right)^2=4x^2-10x+\frac{25}{4}$.

9. $I=(7x-3)(7x+3)-(8x+5)(8x-5)=49x^2-9-(64x^2-25)=49x^2-9-64x^2+25=-15x^2+16$.

10.
$$\begin{aligned} J &= (5x-3)^2-(3x-7)^2 \\ &= 25x^2-30x+9-(9x^2-42x+49) \\ &= 25x^2-30x+9-9x^2+42x-49 \\ &= 16x^2+12x-40. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 26

1.
$$\begin{aligned} A &= (2x^2-3x+2x-3)(x+2)=(2x^2-x-3)(x+2) \\ &= 2x^3+4x^2-x^2-2x-3x-6 \\ &= 2x^3+3x^2-5x-6. \end{aligned}$$

2. $B=(1-2x)^2(1-2x)=(1-4x+4x^2)(1-2x)=1-2x-4x+8x^2+4x^2-8x^3=1-6x+12x^2-8x^3$.

3. *Ici, on pourrait utiliser l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ avec $A=x+y$ et $B=1$, ce qui donne $B=(x+y)^2+2(x+y)+1$, puis développer à nouveau $(x+y)^2$ à l'aide de la première identité remarquable. Il est plus commode de remarquer que la première inégalité remarquable se généralise ainsi :*

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

(dans le développement, les carrés de a, b et c apparaissent, ainsi que tous les « double produits » possibles, à savoir $2ab$, $2ac$ et $2bc$). Notons qu'on peut généraliser de la même façon pour développer $(a+b+c+d)^2$, etc.

$C=x^2+y^2+1+2xy+2x+2y$.

4.
$$\begin{aligned} D &= (x-y)(x+3y)-(x+y)(x-4y)+2(x-2y)^2 \\ &= x^2+3xy-xy-3y^2-(x^2-4xy+xy-4y^2)+2(x^2-4xy+4y^2) \\ &= x^2+2xy-3y^2-x^2+3xy+4y^2+2x^2-8xy+8y^2 \\ &= 2x^2+9y^2-3xy. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 27

1. $A=8a^2-24a+32a^3=8a(a-3+4a^2)$.

2. $B=a\times 3ax-2x\times 3ax+4b\times 3ax=3ax(a-2x+4b)$.

3. $C = 5a^4b^3 + 2a^2x^3 - 3a^2b^5 = a^2 \times 5a^2b^3 + a^2 \times 2x^3 + a^2 \times (-3b^5) = a^2(5a^2b^3 + 2x^3 - 3b^5)$.
4. $D = a^6x^4 - 6a^5x^6 + 9a^4x = a^4x \times a^2x^3 + a^4x \times (-6a^2x^5) + a^4x \times 9 = a^4x(a^2x^3 - 6a^2x^5 + 9)$.
5. $E = 8x^2y^3 - 3xy^4 + 24x^2y^5 = xy^3 \times 8x + xy^3 \times (-y) + xy^3 \times (24xy^2) = xy^3(8x - y + 24xy^2)$.
6. $$\begin{aligned} F &= 15a^2b^2 - 30a^2b^3 + 105a^2b^4 - 75a^2b^5 \\ &= 15a^2b^2 \times 1 + 15a^2b^2 \times (-2b) + 15a^2b^2 \times 7b^2 + 15a^2b^2 \times (-5b^3) \\ &= 15a^2b^2(1 - 2b + 7b^2 - 5b^3). \end{aligned}$$
7. $$\begin{aligned} G &= 6a^4b^3c^2d - 2a^3b^4cd + 8a^5b^2d^3 \\ &= 2a^3b^2d \times 3abc^2 + 2a^3b^2d \times (-2b^2c) + 2a^3b^2d \times 4a^2d^2 \\ &= = 2a^3b^2d(3abc^2 - 2b^2c + 4a^2d^2). \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 28

1. $$\begin{aligned} A &= (2x-3)(5x-1) - (2x-3)(x+1) \\ &= (2x-3)(5x-1-(x+1)) \\ &= (2x-3)(4x-2) \\ &= 2(2x-3)(2x-1). \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} B &= (7x-1)^2 - (7x-1)(3x+2) \\ &= (7x-1)(7x-1) - (7x-1)(3x+2) \\ &= (7x-1)(7x-1-(3x+2)) \\ &= (7x-1)(7x-1-3x-2) \\ &= (7x-1)(4x-3) \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} C &= (4-3x)(2+3x) - 2(1-2x)(3x-4) \\ &= (4-3x)(2+3x) + (4-3x)2(1-2x) \\ &= (4-3x)(2+3x+2(1-2x)) \\ &= (4-3x)(2+3x+2-4x) \\ &= (4-3x)(4-x). \end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned} D &= (3x+1)(2x-3) + (3x+1)(x+2) - (5x+4)(3x+1) \\ &= (3x+1)(2x-3+x+2-(5x+4)) \\ &= (3x+1)(3x-1-5x-4) \\ &= (3x+1)(-2x-5) \\ &= -(3x+1)(2x+5). \end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned} E &= (x-8)(4x-1) + x^2 - 8x \\ &= (x-8)(4x-1) + x(x-8) \\ &= (x-8)(4x-1+x) \\ &= (x-8)(5x-1). \end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned} F &= x^2 - x + (x+1)(1-x) \\ &= x(x-1) - (x+1)(x-1) \\ &= (x-1)(x-(x+1)) \\ &= (x-1)(-1) \\ &= 1-x. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 29

Dans cet exercice, on pourra reconnaître systématiquement une (ou plusieurs !) identités remarquables.

1. $A = a^4 + 4a^2b + 4b^2 = (a^2)^2 + 2a^2 2b + (2b)^2 = (a^2 + 2b)^2$.
2. $B = 4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a - 3b)^2$.
3. $C = x^2 - x + \dfrac{1}{4} = x^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.
4. $D = 9a^2 + \dfrac{b^2}{4} + 3ab = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot \dfrac{b}{2} + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \left(3a + \dfrac{b}{2}\right)^2$.
5. $E = 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = (3x - 1)^2$.
6. $F = 4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x + 1)^2$.

7. $G = 4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x + 3y)^2$.

8. $H = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) = 2(x - 3)^2$.

9. $I = 9b^2 + 6ab + a^2 = (3b)^2 + 2 \cdot 2b \cdot a + a^2 = (3b + a)^2$.

10. $J = 64a^6 - 16a^3b + b^2 = (8a^3)^2 - 2 \cdot 8a^3 \cdot b + b^2 = (8a^3 + b)^2$.

11.
$$\begin{aligned} K &= x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2 = (x-1)(x+1) - x(x+1) + (x+1)(x+1) \\ &= (x-1)(x+1-x+x+1) \\ &= (x-1)(2x+2) \\ &= 2(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

12. $L = (1-x)^2 + 6x + 3 = 1 - 2x + x^2 + 6x + 3 = x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = (x+2)^2$.

Éléments de correction - Exercice 30

Dans toutes les questions, on cherchera à reconnaître la troisième identité remarquable. Elle est très simple à identifier en pratique, puisque c'est la seule qui ne fait intervenir que deux termes.

1. $A = a^2 - 25 = a^2 - 5^2 = (a-5)(a+5)$.

2. $B = 4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x-1)(2x+1)$.

3. $C = 9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$.

4. $D = 25a^2 - 16b^2 = (5a)^2 - (4b)^2 = (5a - 4b)(5a + 4b)$.

5. $E = 5x^3 - 80x = x(5x^2 - 80) = 5x(x^2 - 16) = 5x(x^2 - 4^2) = 5x(x-4)(x+4)$. *Notons qu'ici on a commencé par factorisé par x. Quand il y a un facteur évident dans une expression, il faut toujours commencer par factoriser par celui-ci, cela facilite grandement la suite des calculs.*

6. $F = 4x^2 - a^2y^2 = (2x)^2 - (ay)^2 = (2x - ay)(2x + ay)$.

7. $G = (7x)^2 - 5^2 = (7x-5)(7x+5)$.

8. $H = (a+1)^2 - a^2 = (a + 1 - a)(a + a + 1) = 1 \cdot (2a+1) = 2a + 1$.

9. $I = 9x^2 - (x+2)^2 = (3x - (x+2))(3x + (x+2)) = (3x - x - 2)(3x + x + 2) = (2x-2)(4x+2)$. *Il faut faire attention aux parenthèses !*

10. $J = \dfrac{a^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{5}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{3} - \dfrac{x}{5}\right)\left(\dfrac{a}{3} + \dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{5a - 3x}{15} \cdot \dfrac{5a + 3x}{15} = \dfrac{(5a-3x)(5a+3x)}{225}$.
Remarque : quand on cherche à factoriser une expression avec des quotients, il faut prendre l'habitude d'écrire à la fin les différents facteurs comme une seule fraction.

11.
$$\begin{aligned} K &= \frac{a^2}{x^2} - \frac{9b^2}{y^2} \\ &= \left(\frac{a}{x}\right)^2 - \left(\frac{3b}{y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{x} - \frac{3b}{y}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{3b}{y}\right) \\ &= \frac{ay - 3bx}{xy} \cdot \frac{ay + 3bx}{xy} \\ &= \frac{(ay - 3bx)(ay + 3bx)}{(xy)^2}. \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} L &= (3x-4)^2 - \frac{25}{4} \\ &= (3x-4)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \left(3x - 4 - \frac{5}{2}\right)\left(3x - 4 + \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{6x - 8 - 5}{2} \cdot \frac{6x - 8 + 5}{2} \\ &= \frac{(6x-13)(6x-3)}{4}. \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} M &= \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{x^2}{16} \\ &= \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x+1}{3} - \frac{x}{4}\right)\left(\frac{x+1}{3} + \frac{x}{4}\right) \\ &= \frac{4(x+1)-3x}{12} \cdot \frac{4(x+1)+3x}{12} \\ &= \frac{(4x+4-3x)(4x+4+3x)}{144} \\ &= \frac{(x+4)(7x+4)}{144}. \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} N &= (x+3)^2 - (x+1)^2 \\ &= ((x+3)-(x+1))((x+3)+(x+1)) \\ &= (x+3-x-1)(x+3+x+1) \\ &= 2(2x+4) \\ &= 4(x+2). \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} O &= (a+b)^2 - (a-b)^2 \\ &= ((a+b)-(a-b))((a+b)+(a-b)) \\ &= (a+b-a+b)(a+b+a-b) \\ &= 2b \cdot 2a \\ &= 4ab. \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} P &= (2x+1)^2 - (3x-4)^2 \\ &= (2x+1-(3x-4))(2x+1+3x-4) \\ &= (2x+1-3x+4)(5x-3) \\ &= (-x+5)(5x-3). \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} Q &= (2x+3)^2 - (1-4x)^2 \\ &= (2x+3-(1-4x))(2x+3+1-4x) \\ &= (2x+3-1+4x)(-2x+4) \\ &= (6x+2)(-2x+4) \\ &= 4(3x+1)(-x+2). \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} R &= (3x-4)^2 - 4(x+2)^2 \\ &= (3x-4)^2 - (2(2x+2))^2 \\ &= (3x-4-2(2x+2))(3x-4+2(2x+2)) \\ &= (3x-4-4x-4)(3x-4+4x+4) \\ &= (-x-8)7x \\ &= -(x+8)7x. \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} S &= 4(2x+3)^2 - (3x-2)^2 \\ &= (2(2x+3))^2 - (3x-2)^2 \\ &= (4x+6)^2 - (3x-2)^2 \\ &= (4x+6-(3x-2))(4x+6+3x-2) \\ &= (x+8)(7x+4). \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} T &= 25(3x-1)^2 - 16(5x+3)^2 \\ &= (5(3x-1))^2 - (4(5x+3))^2 \\ &= (15x-5)^2 - (20x+12)^2 \\ &= (15x-5-20x-12)(15x-5+20x+12) \\ &= (-5x-17)(35x+7) \\ &= -7(5x+17)(5x+1). \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} U &= (x^2-16)^2 - (x+4)^2 \\ &= (x^2-16-(x+4))(x^2-16+(x+4)) \\ &= (x^2-x-20)(x^2+x-12). \end{aligned}$$

Or le discriminant de x^2-x-20 est $(-1)^2-4\cdot(-20)\cdot 1 = 81$, donc ses racines sont $\frac{-(-1)-\sqrt{81}}{2\cdot 1} = \frac{1-9}{2} = -4$ et $\frac{-(-1)+\sqrt{81}}{2\cdot 1} = \frac{1+9}{2} = 5$. Ainsi, $x^2-x-20 = (x-(-4))(x-5) = (x+4)(x-5)$.
De même, on peut factoriser x^2+x-12. Le discriminant de ce trinôme vaut $(1)^2-4\cdot(-12)\cdot 1 = 1+48 = 49$, donc ses racines sont $\frac{-1-\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{-1-7}{2} = -4$ et $\frac{-1+\sqrt{49}}{2\cdot 1} = \frac{-1+7}{2} = 3$. Ainsi,

$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$.
Finalement, $U = (x+4)(x-5)(x+4)(x-3) = (x+4)^2(x-5)(x-3)$.

Éléments de correction - Exercice 31

1. $3^4 \cdot 5^4 = (3 \times 5)^4 = 15^4$.
2. $(5^3)^{-2} = 5^{3\times(-2)} = 5^{-6}$.
3. $\dfrac{2^5}{2^{-2}} = 2^{5-(-2)} = 2^7$.
4. $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5} = (-7)^{3-5} = -7^{-2}$.
5. $\dfrac{6^5}{2^5} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^5 = 3^5$.
6. $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}} = \dfrac{30^{28}}{10^{28}} = \left(\dfrac{30}{10}\right)^{28} = 3^{28}$.

12.5 Résolution d'équations

Éléments de correction - Exercice 32

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2 \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1\}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} -5 + x &= 4 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{9\}$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} -5x &= 4 \\ x &= -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} -4x &= -10 \\ x &= \frac{-10}{-4} \\ x &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\dfrac{5}{2}\right\}$.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 3 - x &= -8 \\ -x &= -11 \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{11\}$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 5x - 7 \\ -3x + 4 &= -7 \\ -3x &= -11 \\ x &= \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{11}{3}\right\}$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x - 5 &= \frac{1}{2}x - 3 \\ \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)x - 5 &= -3 \\ \frac{1}{6}x &= 2 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

(on a multiplié des deux côtés par 6 à la dernière étape). Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{12\}$.

9. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x + 4 &= x - 7 \\ 4 &= -7. \end{aligned}$$

(on a enlevé x des deux côtés). Puisque l'égalité obtenue est impossible, l'équation n'admet pas de solution. Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation est $\emptyset$.

Éléments de correction - Exercice 33

1. $x^2(x+1) = 4(x+1)$
On a

$$\begin{gathered} x^2(x+1) = 4(x+1) \\ x^2(x+1) - 4(x+1) = 0 \\ (x+1)(x^2-4) = 0 \\ (x+1)(x-2)(x+2) = 0 \end{gathered}$$

d'où $\boxed{\mathcal{S} = \{-2; -1; 2\}}$

2. $(3x+2)^2 = (x+1)^2$
On a

$$\begin{gathered} (3x+2)^2 = (x+1)^2 \\ (3x+2)^2 - (x+1)^2 = 0 \\ (3x+2-x-1)(3x+2+x+1) = 0 \\ (2x+1)(3x+3) = 0 \end{gathered}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-1}{2}; -1\right\}}$$

3. $(x-5)(x-7) = (x-5)^2$
On a

$$\begin{gathered}(x-5)(x-7) = (x-5)^2\\(x-5)(x-7) - (x-5)^2 = 0\\(x-5)((x-7)-(x-5)) = 0\\-2(x-5) = 0\end{gathered}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \{5\}}$$

4. $(2x-3)(5x+1)(5-2x) = 0$
On a déjà un produit nul. On peut conclure immédiatement

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}; \frac{-1}{5}; \frac{5}{2}\right\}}$$

5. $2(x+2)(x-4) = x^2 - 4$
On a

$$\begin{gathered}2(x+2)(x-4) = x^2 - 4\\2(x+2)(x-4) - (x^2-4) = 0\\2(x+2)(x-4) - (x-2)(x+2) = 0\\(x+2)(2x-8-x+2) = 0\\(x+2)(x-6) = 0\end{gathered}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2; 6\}}$$

6. $(3x-1)(5x-4) = 25x^2 - 16$
On a

$$\begin{gathered}(3x-1)(5x-4) = 25x^2 - 16\\(3x-1)(5x-4) - (25x^2-16) = 0\\(3x-1)(5x-4) - (5x-4)(5x+4) = 0\\(5x-4)(3x-1-5x-4) = 0\\(5x-4)(-2x-5) = 0\end{gathered}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{5}; \frac{-5}{2}\right\}}$$

7. $3x(1-3x) = 0$
On a déjà un produit nul. On peut conclure immédiatement

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}}$$

Attention à l'erreur $3x = 0$ donc $x = -3$!!!! On rappelle que la seule solution de $3x = 0$ est $x = 0$.

8. $\left(\dfrac{2x-5}{3}\right)^2 \left(\dfrac{4x}{5} - \dfrac{3}{7}\right) = 0$

On a déjà un produit nul. On peut conclure immédiatement en se rappelant que la seule solution de $\dfrac{2x-5}{3} = 0$ est $\dfrac{5}{2}$ et que la seule solution de $\dfrac{4x}{5} - \dfrac{3}{7} = 0$ est $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{15}{28}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}; \frac{15}{28}\right\}}$$

9. $4x^4 - 1 = 2x^2 + 1$
On a

$$\begin{gathered}4x^4 - 1 = 2x^2 + 1 \\ (2x^2)^2 - 1^2 - (2x^2 + 1) = 0 \\ (2x^2 + 1)(2x^2 - 1) - (2x^2 + 1) = 0 \\ (2x^2 + 1)((2x^2 - 1) - 1) = 0 \\ (2x^2 + 1)2(x^2 - 1) = 0 \\ (2x^2 + 1)2(x - 1)(x + 1) = 0\end{gathered}$$

Comme pour tout réel $x, 2x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, il n'y aucun réel vérifiant $2x^2 + 1 = 0$ d'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 1\}}$$

10. $9x^2 + 1 = 6x$
On a

$$\begin{gathered}9x^2 + 1 = 6x \\ 9x^2 - 6x + 1 = 0 \\ (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = 0 \\ (3x - 1)^2 = 0\end{gathered}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

Éléments de correction - Exercice 34

1. $(x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) = 2(x - 2)(x - 3)$
Il n'y a aucun facteur commun : on développe et réduit.

$$\begin{gathered}(x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) = 2(x - 2)(x - 3) \\ x^2 - 3x + 2 + x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 10x + 12 \\ 3x - 7 = 0\end{gathered}$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{3}\right\}}$$

2. $(x - a)(x - 2a)(x + a) = x^3 + 2a^3$
Il n'y a aucun facteur commun : on développe et réduit.

$$\begin{gathered}(x - a)(x - 2a)(x + a) = x^3 + 2a^3 \\ (x - 2a)(x^2 - a^2) = x^3 + 2a^3 \\ x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = x^3 + 2a^3 \\ -2ax^2 - a^2x = 0 \\ x(-2ax - a^2) = 0\end{gathered}$$

Pour dire que la seule solution de $-2ax - a^2 = 0$ est $x = \dfrac{a^2}{-2a} = \dfrac{a}{-2}$, il est indispensable de supposer $a \neq 0$.
Il convient donc d'étudier le cas $a = 0$: dans ce cas, l'équation $-2ax - a^2 = 0$ c'est à dire $0x = 0$ est vérifiée par tout réel x. En conclusion :

— si $a \neq 0$ alors $\boxed{\mathcal{S} = \left\{0; \dfrac{a}{-2}\right\}}$.

— si $a = 0$ alors $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$

3. $(\frac{1}{2} - x)(5x + 3) + 3x(2x - 1) = 0$
On peut faire apparaître un facteur commun.

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}((1-2x)(5x+3)) + 3x(2x-1) = 0\\(1-2x)((\tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}) - 3x) = 0\\(1-2x)((\tfrac{-1}{2}x + \tfrac{3}{2}) = 0\end{gathered}$$

Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}}$.

4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
On peut faire apparaître un facteur commun.

$$\begin{gathered}x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0\\x^2(x+2) - (x+2) = 0\\(x+2)(x^2-1) = 0\\(x+2)(x-1)(x+1) = 0\end{gathered}$$

Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \{-1; -2; 1\}}$.

5. $\sqrt{2}x^4 - 4x^2 = -2\sqrt{2}$
On peut factoriser à l'aide d'une identité remarquable.

$$\begin{gathered}\sqrt{2}x^4 - 4x^2 = -2\sqrt{2}\\\sqrt{2}x^4 - 4x^2 + 2\sqrt{2} = 0\\\sqrt{2}\left(x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + 2\right) = 0\\\sqrt{2}\left(x^4 - 2\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2})^2\right) = 0\\\sqrt{2}\left(x^2 - \sqrt{2}\right)^2 = 0\\\sqrt{2}\left(x - \sqrt{\sqrt{2}}\right)^2\left(x + \sqrt{\sqrt{2}}\right)^2 = 0\end{gathered}$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{\sqrt{2}}; -\sqrt{\sqrt{2}}\right\}}$.

Éléments de correction - Exercice 35

1. $3x^2 - 5x + 1 = 0$
$a = 3, b = -5, c = 1, \Delta = 13, \mathcal{S} = \left\{\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}, \dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}$

2. $-4x + 2x^2 - 3 = 0$
$a = 2, b = -4, c = -3, \Delta = 40, \mathcal{S} = \left\{\dfrac{4-\sqrt{20}}{4}, \dfrac{4+\sqrt{20}}{4}\right\}$

3. $x^2 + x = -1$ c'est à dire $x^2 + x + 1 = 0$
$a = 1, b = 1, c = 1, \Delta = -3, \mathcal{S} = \emptyset$

4. $5x^2 - 4x + 1 = 0$
$a = 5, b = -4, c = 1, \Delta = -4, \mathcal{S} = \emptyset$

5. $x^2 - 6x + 9 = 0$
$a = 1, b = -6, c = 9, \Delta = 0, \mathcal{S} = \{3\}$

6. $\frac{x^2}{4} + x + 1 = 0$
$a = \frac{1}{4}, b = 1, c = 1, \Delta = 0, \mathcal{S} = \{-2\}$

7. $-2x^2 - 3x + 6 = 0$
$a = -2, b = -3, c = 6, \Delta = 57, \mathcal{S} = \left\{\dfrac{3-\sqrt{57}}{-4}, \dfrac{3+\sqrt{57}}{-4}\right\}$

8. $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$
$a = \sqrt{2}, b = -3, c = \sqrt{2}, \Delta = 1, \mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right\}$

9. $\frac{3}{4}x^2 + \sqrt{7}x - 3 = 0$
$a = \frac{3}{4}, b = \sqrt{7}, c = -3, \Delta = 16, \mathcal{S} = \left\{\dfrac{-\sqrt{7}-4}{\frac{3}{2}}, \dfrac{-\sqrt{7}+4}{\frac{3}{2}}\right\}$

10. $7x^2 + 6x = 1$
$a = 7, b = 6, c = -1, \Delta = 64, \mathcal{S} = \left\{-1; \dfrac{1}{7}\right\}$

Éléments de correction - Exercice 36

m désigne un nombre réel. Soit (E_m) l'équation $(m-1)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ d'inconnue réelle x.

1. Pour $m = 0$, on obtient l'équation $-x^2 + 2 = 0$ c'est à dire $x^2 = 2$. Il y a donc deux solutions : $\sqrt{2}, \sqrt{2}$.
Pour $m = 1$, on obtient l'équation $2x + 3 = 0$. Il y a une unique solution : $\dfrac{-3}{2}$.
2. $x = 0$ est solution uniquement lorsque $(m-1) \times 0^2 + 2m \times 0 + m + 2 = 0$ c'est à dire pour $m = -2$. En particulier, pour $m = -2$, on obtient $-3x^2 - 4x = 0$ d'où $x(-3x-4) = 0$. Il y a deux solutions : 0 et $\dfrac{-4}{3}$.
3. Notons que l'équation (E_m) est une équation du seconde degré lorsque $m - 1 \neq 0$ soit lorsque $m \neq 1$ et une équation du premier degré lorsque $m = 1$. Dans ce ce dernier cas, comme nous l'avons vu, l'équation ne possède qu'une unique solution : $\dfrac{-3}{2}$.
Examinons alors le cas $m \neq 1$. On identifie les coefficients $a = m - 1, b = 2m, c = m + 2$. On en déduit que $\Delta = (2m)^2 - 4(m+2)(m-1) = 4m^2 - 4m^2 - 4m + 8 = -4(m-2)$. On en déduit que si $m \neq 1$ et $m < 2$ alors $\Delta > 0$, si $m = 2$ alors $\Delta = 0$ et si $m > 2$ alors $\Delta < 0$. Finalement, :
   (a) (E_m) possède une unique solution pour $m = 1$ ou $m = 2$.
   (b) (E_m) possède deux solutions distinctes pour $m \neq 1$ et $m < 2$
   (c) (E_m) n'a aucune solution réelle lorsque $m > 2$.

Éléments de correction - Exercice 37

1. $\dfrac{2x+8}{5-2x} = 0$
Valeur interdite : $x = \dfrac{5}{2}$, solution possible : $x = -4$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \{-4\}}$
2. $\dfrac{3x+1}{2+6x} = 0$
Valeur interdite : $x = \dfrac{-1}{3}$, solution possible : $x = \dfrac{-1}{3}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$
3. $\dfrac{10x-15}{12-8x} = 0$
Valeur interdite : $x = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$, solution possible : $x = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$
4. $\dfrac{(-6x+5)(3x-1)}{(7+3x)(6x-2)} = 0$
Valeurs interdites : $x = \dfrac{-3}{7}$, $x = \dfrac{1}{3}$, solutions possibles : $x = \dfrac{5}{6}$ ou $x = \dfrac{1}{3}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{5}{6}\right\}}$
5. $\dfrac{(-x+5)(3x-1)}{(2+3x)(-7x-3)} = 0$
Valeurs interdites : $x = \dfrac{-2}{3}$ ou $x = \dfrac{-3}{7}$, solutions possibles : $x = 5$ ou $x = \dfrac{1}{3}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{5; \dfrac{1}{3}\right\}}$

6. $\dfrac{(2x+1)(5x-4)(8x-6)}{(-4x+3)(-6x-3)}=0$
Valeurs interdites : $x=\dfrac{3}{4}$ ou $x=\dfrac{-1}{2}$, solutions possibles : $x=\dfrac{-1}{2}$ ou $x=\dfrac{4}{5}$ ou $x=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$.
Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{4}{5}\right\}}$

Éléments de correction - Exercice 38

1. $\dfrac{2}{3x+1}=5$
On se ramène à $\dfrac{2}{3x+1}-5=0$ c'est à dire $\dfrac{2}{3x+1}-\dfrac{5(3x+1)}{3x+1}=0$ d'où $\dfrac{-15x-3}{3x+1}=0$.
Valeur interdite : $x=\dfrac{-1}{3}$, solution possible : $x=\dfrac{-3}{15}=\dfrac{-1}{5}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-1}{5}\right\}}$

2. $\dfrac{3x+1}{6-5x}=2$
On se ramène à $\dfrac{3x+1}{6-5x}-2=0$ c'est à dire $\dfrac{3x+1}{6-5x}-\dfrac{2(6-5x)}{6-5x}=0$ d'où $\dfrac{13x-11}{6-5x}=0$.
Valeur interdite : $x=\dfrac{6}{5}$, solution possible : $x=\dfrac{11}{13}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{11}{13}\right\}}$

3. $\dfrac{9-x^2}{x-3}=0$
Valeur interdite : $x=3$, solutions possibles : $x=3$ ou $x=-3$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\{-3\}}$

4. $\dfrac{3}{(x-1)(6x-2)}=\dfrac{4}{1-2x}$
On se ramène à $\dfrac{3}{(x-1)(6x-2)}-\dfrac{4}{1-2x}$ c'est à dire $\dfrac{3(1-2x)-4(x-1)(6x-2)}{(x-1)(6x-2)(1-2x)}=0$ d'où $\dfrac{-24x^2+26x-5}{(x-1)(6x-2)(1-2x)}=0$.
Valeurs interdites : $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$, solutions possibles : (on obtient une équation du second degré avec $\Delta=26^2-20\times 24=676-480=196=14^2$) $x=\dfrac{-40}{-48}=\dfrac{5}{6}$ ou $x=\dfrac{-12}{-48}=\dfrac{1}{4}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{4}\right\}}$

5. $\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x-2}=3$
On se ramène à $\dfrac{x-3}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x-2}-3=0$ c'est à dire

$$\frac{(x-3)(x-2)+(2x+5)(x+1)-3(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0$$
$$\frac{x^2-5x+6+2x^2+7x+5-3x^2+3x+6}{(x+1)(x-2)}=0$$
$$\frac{5x+17}{(x+1)(x-2)}=0$$

Valeurs interdites : $-1,2$, solution possible : $\dfrac{-17}{5}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{-17}{5}\right\}}$

6. $\dfrac{2x^2+1}{3+x}=2x$
On se ramène à $\dfrac{2x^2+1}{3+x}-2x=0$ c'est à dire

$$\frac{2x^2+1}{3+x}-\frac{2x(3+x)}{3+x}=0$$
$$\frac{2x^2+1-6x-2x^2}{3+x}=0$$
$$\frac{1-6x}{3+x}=0$$

Valeur interdite : -3 , solution possible : $\frac{1}{6}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{6}\right\}}$

7. $\dfrac{1}{1-2x}+4=\dfrac{-4x}{2-x}$

On se ramène à $\dfrac{1}{1-2x}+4-\dfrac{-4x}{2-x}=0$ c'est à dire

$$\frac{2-x}{(1-2x)(2-x)}+\frac{4(2-x)(1-2x)}{(2-x)(1-2x)}+\frac{4x(1-2x)}{(2-x)(1-2x)}=0$$
$$\frac{2-x+8x^2-20x+8+4x-8x^2}{(2-x)(1-2x)}=0$$
$$\frac{10-17x}{(2-x)(1-2x)}=0$$

Valeurs interdites : 2, $\frac{1}{2}$, solution possible : $\frac{10}{17}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{10}{17}\right\}}$

8. $\dfrac{x}{3x-1}=\dfrac{3x-1}{x}$

On se ramène à $\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{3x-1}{x}=0$ c'est à dire

$$\frac{x^2-(3x-1)^2}{x(3x-1)}=0$$
$$\frac{(4x-1)(-2x+1)}{x(3x-1)}=0$$

Valeurs interdites : 0, $\frac{1}{3}$, solutions possibles : $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}}$

Éléments de correction - Exercice 39

Soit (E) l'équation $2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=0$.

1. Remplaçons x par 0 : $2x^4-9x^3+8x^2-9x+2=2\neq 0$ ainsi 0 n'est pas solution de (E).
2. Développons

$$\begin{aligned}2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+8&=\frac{2x^4+2}{x^2}-\frac{9x^2-9}{x}+8\\&=\frac{2x^4+2}{x^2}-\frac{9x^3-9x}{x^2}+\frac{8x^2}{x^2}\\&=\frac{2x^4-9x^3+8x^2+9x+2}{x^2}\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$ seront les mêmes solutions que $\frac{2x^4-9x^3+8x^2+9x+2}{x^2}=0$ ce qui revient à $2x^4-9x^3+8x^2+9x+2=0$ car 0 n'est pas solution de (E) d'après la question précédente.

3. $X=x+\dfrac{1}{x}$ vérifie $2X^2-9X+4=0$ signifie que :

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

$$2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$
$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+4+4=0$$
$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

Or, les solutions de cette équations sont exactement les solutions de (E) d'après la question précédente.

4. Les solutions de $2X^2-9X+4=0$ sont $(a=2, b=-9, c=4, \Delta=49)$ $\dfrac{9-\sqrt{49}}{4}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{9+\sqrt{49}}{4}=4$. On cherche donc les réels x non nuls vérifiant $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$ ou $x+\dfrac{1}{x}=4$.
Résolution de $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$.
On a avec $x\neq 0$:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{2x^2+2}{2x}=\frac{x}{2x}$$
$$2x^2+2=x$$
$$2x^2-x+2=0$$

On reconnaît une équation du second degré avec $a=2, b=-1, c=2, \Delta=1-16=-15<0$. Il n'y a donc aucune solution réelle à cette équation.
Résolution de $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$.
On a avec $x\neq 0$:

$$x+\frac{1}{x}=4$$
$$\frac{x^2+1}{x}=4$$
$$x^2+1=4x$$
$$x^2-4x+1=0$$

On reconnaît une équation du second degré avec $a=1, b=-4, c=1, \Delta=12$. Il y a deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{4-\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$ et $x_2=\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$
Finalement, $\boxed{\mathcal{S}=\left\{2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}}$

Éléments de correction - Exercice 40

1. $A_1=2x^2+3xy-2y^2$.
2. $A_2=6+13x+x^2-2x^3$.
3. $A_3=5x^2+4y^2-4x^2y^2-1$.
4. $A_4=(x^2+y^2+z^2+Zxy+2xz+2yz$.
5. $A_5=-(x-y+1)(x-y-1)=-\left((x-y)^2-1\right)=1+2xy-x^2-y^2$.
6. $A_6=\dfrac{1}{4}\left((1-2x)^2+(1+2y)^2-4(x-y)^2\right)=\dfrac{8xy-4x+4y+2}{4}=\dfrac{4xy-2x+2y+1}{2}$.

12.6 Résolution d'inéquations

Éléments de correction - Exercice 41

1. $-5x+2\geqslant 0$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{2}{5}\right]}$$

2. $4x - 3 \leqslant 0$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{3}{4}\right]}$$

3. $\dfrac{7x+5}{5} < 0$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{-5}{7}\right[}$$

4. $\dfrac{-4x}{3} - \dfrac{1}{4} > 0$

Cette équation est équivalente à $\dfrac{-16x-3}{12} > 0$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{-3}{16}\right[}$$

5. $5x + 2 < -3x + 4$

Cette équation est équivalente à $8x < 2$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{1}{4}\right[}$$

6. $-7x - 8 > 5x - 6$

Cette équation est équivalente à $12x < -2$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{-1}{6}\right[}$$

7. $-\sqrt{2}x - \sqrt{3} \geqslant 2x + \sqrt{6}$

Cette équation est équivalente à $(2+\sqrt{2})x \leqslant -\sqrt{6} - \sqrt{3}$.

En remarquant que $-\sqrt{6}-\sqrt{3} = -\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ et que $2+\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$, on aboutit finalement à $\sqrt{2}x \leqslant -\sqrt{3}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right]]}$$

8. $\dfrac{-3x}{4} + \dfrac{5}{7} \leqslant \dfrac{4}{3} - \dfrac{2x}{5}$

Cette équation est équivalente à $\dfrac{-21x+20}{28} \leqslant \dfrac{20-6x}{15}$ c'est à dire :

$$15(-21x+20) \leqslant 28(20-6x)$$
$$-260 \leqslant 147x$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{-260}{147} ; +\infty\right[}$$

9. $10^{-2}x - 1 < 10^{-3} - \dfrac{x}{10^4}$

Cette équation est équivalente à $(10^{-2} + 10^{-4})x < 10^{-3} + 1$ c'est à dire :

$$x < \frac{10^{-3}+1}{10^{-2}+10^{-4}}$$
$$x < \frac{10010}{101}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{10010}{101}\right[}$$

10. $-3x+7 < \dfrac{5x}{3}$
Cette équation est équivalente à $-9x+21 < 5x$ c'est à dire :

$$21 < 14x$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[}$$

Éléments de correction - Exercice 42

1. $2x+7 \geqslant 0$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{-7}{2} ; +\infty\right[}$$

2. $3(x-1) \leqslant 1-2x$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{4}{5}\right]}$$

3. $\dfrac{1-3x}{5} < 0$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[}$$

4. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4-x}{4} > 5$
On se ramène à $4x - 2(4-x) > 40$ c'est à dire $6x > 48$.

$$\boxed{\mathcal{S} =]8 ; +\infty[}$$

5. $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{1-x}{2} \geqslant \dfrac{2(2-x)}{3}$
On se ramène à $2(x-2) - 3(1-x) \geqslant 4(2-x)$ c'est à dire $9x \geqslant 15$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[}$$

6. $-\sqrt{6}x - 2 > -\sqrt{2}(x+1)$ On remarquera que $\sqrt{6}-\sqrt{2} > 0$ donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right[}$$

https ://www.overleaf.com/project/62a19c778cbe1d1af261b039 **Éléments de correction - Exercice 43**

Remarquons tout d'abord que $x = 3$ est impossible car ce réel annule le dénominateur.
On peut déjà chercher les solutions vérifiant $x > 3$.
Dans ce cas, en multipliant par $x - 3 > 0$, on obtient :

$$2x + m \leqslant x - 3$$
$$x \leqslant -3 - m$$

Finalement si $3 < -3 - m$ c'est à dire si $m < -6$, les réels x vérifiant $3 < x \leqslant -3 - m$ sont solutions.
Si $m \geqslant -6$, alors $-3 - m \leqslant 3$ donc il n'y a pas de réel $x > 3$ qui soit solution.
On peut ensuite chercher les solutions vérifiant $x < 3$.
Dans ce cas, en multipliant par $x - 3 < 0$, on obtient :

$$2x + m \geqslant x - 3$$
$$x \geqslant -3 - m$$

Finalement si $3 > -3 - m$ c'est à dire si $m > -6$, les réels x vérifiant $-3 - m \leqslant x < 3$ sont solutions.
Si $m \leqslant -6$, alors $-3 - m \geqslant 3$ donc il n'y a pas de réel $x < 3$ qui soit solution.
Récapitulons :

— si $m < -6$, $\boxed{\mathcal{S} =]3; -3 - m]}$

— si $m > -6$, $\boxed{\mathcal{S} = [-3 - m; 3[}$

— si $m = -6$, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

Notons qu'il est également possible de se ramener à l'inéquation $\dfrac{2x + m}{x - 3} - 1 \leqslant 0$ c'est à dire $\dfrac{x + m + 3}{x - 3} \leqslant 0$ puis faire un tableau de signes. Pour placer $-m - 3$ dans le tableau, on sera obligé de distinguer les cas $-m - 3 > 3$, $-m - 3 = 3$, $-m - 3 < 3$. On retrouve alors les résultats précédents.

Éléments de correction - Exercice 44

1. $4x^3 - x > 2x^2 + x$
   On obtient

$$4x^3 - x - 2x^2 - x > 0$$
$$x(4x^2 - 1) - x(2x + 1) > 0$$
$$x(2x - 1)(2x + 1) - x(2x + 1) > 0$$
$$x(2x + 1)(2x - 1 - 1) > 0$$
$$2x(2x + 1)(x - 1) > 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x(2x + 1)(x - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\tfrac{-1}{2}; 0[\cup]1; +\infty[}$$

NB : on peut également étudier le signe de $2x(2x^2 - x - 1)$ à l'aide du paragraphe sur les inéquations polynomilaes de degré deux.

2. $x^2 < 7$
On obtient

$$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) < 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}$		$+\infty$
$x - \sqrt{7}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{7}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\sqrt{7}; \sqrt{7}[}$$

NB : on peut également retrouver ce résultat à l'aide de la parabole représentative de la fonction carré. Il est intéressant de constater la cohérence des résultats en changeant de cadres.

3. $x^2 > 5$
On obtient

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) > 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x - \sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}; +\infty[}$$

4. $\dfrac{5x-1}{2-3x} \geqslant 2$
On obtient

$$\frac{5x-1}{2-3x} - 2 \geqslant 0$$
$$\frac{11x-5}{2-3x} \geqslant 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$\frac{5}{11}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$11x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - 3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{11x-5}{2-3x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{5}{11}; \frac{2}{3}\right[}$$

5. $(2x+1)^2(5x-3) > 0$
Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$(2x + 1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$5x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x + 1)^2(5x - 3)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{3}{5}; +\infty\right[}$$

6. $\dfrac{2}{x-4} > \dfrac{-3}{x+1}$
On obtient

$$\frac{2}{x-4} - \frac{-3}{x+1} > 0$$
$$\frac{2(x+1)+3(x-4)}{(x-4)(x+1)} > 0$$
$$\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)} > 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$5x - 10$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{5x-10}{(x-4)(x+1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-1;2[\cup]4;+\infty[}$$

7. $(x+1)^2(5x-2) < (2x+2)^2(4x-3)$
On obtient

$$(x+1)^2(5x-2) - (2x+2)^2(4x-3) < 0$$
$$(x+1)^2((5x-2) - 4(4x-3)) < 0$$
$$(x+1)^2(-11x+10) < 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-1		$\frac{10}{11}$		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$-11x+10$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)^2(-11x+10)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{10}{11};+\infty\right[}$$

8. $\dfrac{(2x+1)^2-4}{x^2-4x} < 0$
On obtient

$$\frac{(2x+1-2)(2x+1+2)}{x(x-2)(x+2)} < 0$$
$$\frac{(2x-1)(2x+3)}{x(x-2)(x+2)} < 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{-3}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(2x-1)(2x+3)}{x(x-2)(x+2)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup \left]-\frac{-3}{2}; 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 2\right[}$$

9. $(x^3 - 9x)(x + 1) > 0$
On obtient

$$x(x^2 - 9)(x + 1) < 0$$
$$x(x - 3)(x + 3)(x + 1) < 0$$

Le tableau de signes est :

x	$-\infty$		-3		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x + 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 1$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x(x-3)(x+3)(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	

Donc :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup \left]-\frac{-3}{2}; 0\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 2\right[}$$

Éléments de correction - Exercice 45

1. $3x^2 - 5x + 1 < 0$

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{13}}{6}$		$\frac{5+\sqrt{13}}{6}$		$+\infty$
$3x^2 - 5x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{5-\sqrt{13}}{6}; \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right[}$$

2. $-4x + 2x^2 - 3 < 0$
On trouve $\Delta = 40$ et donc $\sqrt{40} = 4\sqrt{5}$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$2x^2 - 4x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}\right[}$$

3. $x^2 + x \geqslant -1$
Ici, $\Delta = -3$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 + x + 1$	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$$

4. $5x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$
$\Delta = -4$

x	$-\infty$	$+\infty$
$5x^2 - 4x + 1$	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

5. $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$		$+$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$$

6. $\frac{x^2}{4} + x + 1 > 0$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\frac{x^2}{4} + x + 1$		$+$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$$

7. $-2x^2 - 3x + 6 \leqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{3+\sqrt{57}}{-4}$		$\frac{3-\sqrt{57}}{-4}$		$+\infty$
$-2x^2-3x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{3+\sqrt{57}}{-4}\right] \cup \left[\frac{3-\sqrt{57}}{-4}; +\infty\right[}$$

8. $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} \geqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\sqrt{2}x^2-3x+\sqrt{2}$		$+$	0	$-z$	$+$		

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right[}$$

9. $\frac{3}{4}x^2 + \sqrt{7}x - 3 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{4\sqrt{7}-16}{3}$		$\frac{4\sqrt{7}+16}{3}$		$+\infty$
$\frac{3}{4}x^2+\sqrt{7}x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{4\sqrt{7}-16}{3}\right[\cup \left]\frac{4\sqrt{7}+16}{3}; +\infty\right[}$$

10. $7x^2 + 6x < 1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
$7x^2+6x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-1; \frac{1}{7}\right[}$$

Éléments de correction - Exercice 46

1. $\dfrac{-x^2-5x-1}{x^2-4x+4} \geqslant 1$
Cette inéquation se ramène à

$$\frac{-x^2-5x-1}{x^2-4x+4} - 1 \geqslant 0$$
$$\frac{-2x^2-x-5}{x^2-4x+4} \geqslant 0$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-2x^2-x-5$		$-$		$-$	
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	
$\dfrac{-2x^2-x-5}{x^2-4x+4}$		$-$	$\parallel$	$-$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

2. $\dfrac{-x^2-5x-1}{x+1} > 2x+1$
Cette inéquation se ramène à

$$\frac{-x^2-5x-1}{x+1} - (2x+1) > 0$$
$$\frac{-x^2-5x-1}{x+1} - \frac{(2x+1)(x+1)}{x+1}) > 0$$
$$\frac{-5x^2-8x-2}{x+1} > 0$$

x	$-\infty$		$\dfrac{-4-\sqrt{6}}{5}$		-1		$\dfrac{-4+\sqrt{6}}{5}$		$+\infty$
$-5x^2-8x-2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-5x^2-8x-2}{x+1}$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{-4-\sqrt{6}}{5}\right[\cup \left]-1; \frac{-4+\sqrt{6}}{5}\right[}$$

3. $(3x-1)^2 > 2x+3$
Cette inéquation se ramène à

$$9x^2 - 6x + 1 - 2x - 3 > 0$$
$$9x^2 - 8x - 2 > 0$$

x	$-\infty$		$\frac{8-\sqrt{136}}{18}$		$\frac{8+\sqrt{136}}{18}$		$+\infty$
$9x^2 - 8x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{8-\sqrt{136}}{18}\right[\cup \left]\frac{8+\sqrt{136}}{18}; +\infty\right[}$$

4. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{3}{x} \leqslant -2$
Cette inéquation se ramène à

$$\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x} + 2 \leqslant 0$$
$$\frac{x + 3(x-2) + 2x(x-2)}{x(x-2)} \leqslant 0$$
$$\frac{3(x^2-3)}{x(x-2)} \leqslant 0$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$3(x^2-3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3(x^2-3)}{x(x-2)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[-\sqrt{3}; 0\right[\cup \left[\sqrt{3}; 2\right[}$$

5. $\dfrac{x+4}{2x-1} \geqslant 2x$
Cette inéquation se ramène à

$$\frac{-4x^2 + 3x + 4}{2x-1} \geqslant 0$$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{73}}{8}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3+\sqrt{73}}{8}$		$+\infty$
$-4x^2+3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-4x^2+3x+4}{2x-1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{3-\sqrt{73}}{8}\right] \cup \left]\frac{1}{2}; \frac{3+\sqrt{73}}{8}\right]}$$

6. $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2} \leqslant 1$

Cette inéquation se ramène à

$$0 \leqslant \frac{(x-3)^2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \text{ et } \frac{(x-3)^2}{(x+1)^2} - 1 \leqslant 0$$
$$\frac{x^2-14x+17}{2(x+1)^2} \geqslant 0 \text{ et } \frac{-8(x-1)}{(x+1)^2} \leqslant 0$$

L'ensemble solution de la première inéquation est $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;7-4\sqrt{2}] \cup [7+4\sqrt{2};+\infty[$.
L'ensemble solution de la seconde inéquation est $[1;+\infty[$.
Comme $1 < 7-4\sqrt{2}$ (en effet : $\sqrt{2} < 2$ donc $4\sqrt{2} < 8$ donc $0 < 8-\sqrt{2}$, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S} = [1;7-4\sqrt{2}] \cup [7+4\sqrt{2};+\infty[}$$

7. $\dfrac{-x^2+5x+4}{7x^2-4x-3} < 0$

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{-3}{7}$		1		$\frac{5+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+5x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$7x^2-4x-3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+5x+4}{7x^2-4x-3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3}{7}; 1\right[\cup \left]\frac{5+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right[}$$

Éléments de correction - Exercice 47

Cette équation est équivalente à

$$x^2 + (-3m - 3)x + (2m^2 + 5m + 2) > 0$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant

$$\Delta = (-3m - 3)^2 - 4(2m^2 + 5m + 2) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2.$$

— Si $m = 1$ alors $\Delta = 0$ et l'inéquation se ramène à $x^2 - 6x + 9 > 0$. On trouve alors

$$\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{3\}}.$$

— Si $m \neq 1$ alors $\Delta > 0$ avec deux racines $\dfrac{3(m+1) - \sqrt{(m-1)^2}}{2}$; $\dfrac{3(m+1) + \sqrt{(m-1)^2}}{2}$. Comme $a = 1 > 0$,

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, \frac{3(m+1) - \sqrt{(m-1)^2}}{2}\right[\cup \left]\frac{3(m+1) + \sqrt{(m-1)^2}}{2}; +\infty\right[}.$$

Attention à ne pas conclure trop rapidement que $\sqrt{(m-1)^2} = m - 1$. En effet, il est globalement faux d'écrire que pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = x$. Par exemple, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$.

Éléments de correction - Exercice 48

1. $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times \sqrt{5}^2 = 4 \times 5 = 20$.
2. $(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$.
4. $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2} = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2} = 3 + \sqrt{2}$.
5. $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2 = (3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7} - 3 + \sqrt{7}) = 6 \cdot 2\sqrt{7} = 12\sqrt{7}$.
6. $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4 = (2\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$.
7. $\left(\dfrac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}(25 - 10\sqrt{2} + 2) = \dfrac{27}{3} - \dfrac{10\sqrt{2}}{3} = 9 - \dfrac{10}{3}\sqrt{2}$.
8. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 + 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 10$.

12.7 Exponentielle et logarithme

Éléments de correction - Exercice 49

1. $\ln(\sqrt{2}) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2)$.
2. $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln(2)$.
3. $\ln 6 - \ln 3 = \ln(2 \times 3) - \ln 3 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 3 = \ln 2$.
4. $\ln\left(2\mathrm{e}^2\right) = \ln 2 + \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = \ln 2 + 2\ln(\mathrm{e}) = \ln 2 + 2$.

Éléments de correction - Exercice 50

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{x^2 - 2x}$.
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2 + 2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}} = \mathrm{e}^{x^2 + 2x - (x+1)^2} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. $\dfrac{\ln(2x)}{\ln x} = \dfrac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} = \dfrac{\ln 2}{\ln x} + \dfrac{\ln x}{\ln x} = \dfrac{\ln 2}{\ln x} + 1$, mais on ne peut pas simplifier plus. *Attention à ne surtout pas écrire* $\dfrac{\ln(2x)}{\ln x} = \ln(2x - x)$.

4. $\mathrm{e}^{2\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x^2} = x^2$. *Attention à ne surtout pas écrire* $\mathrm{e}^{2\ln x} = 2x$. *Pour simplifier une exponentielle et un logarithme, il faut qu'ils soient « accolés ».*

5. $\ln(2x) - \ln x = \ln\left(\dfrac{2x}{x}\right) = \ln 2$.

6. $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln\left(x^2\right) = -2\ln(x)$.

7. On a

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= \ln((\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}))\\ &= \ln\left((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\right)\\ &= \ln(3-2)\\ &= \ln 1\\ &= 0.\end{aligned}$$

8. $\ln\left(\mathrm{e}^2\sqrt{\mathrm{e}}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) + \ln(\sqrt{\mathrm{e}}) - \ln \mathrm{e} = 2\ln \mathrm{e} + \dfrac{1}{2}\ln \mathrm{e} - \ln \mathrm{e} = 2 + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{3}{2}$.

9. $\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^5\right)}{\ln\left(\mathrm{e}^3\right)} = \dfrac{5}{3}$.

10. $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}} \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}2x}\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{x-x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

11. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln(x^2) = -\ln(x) + 2\ln(x) = \ln(x)$.

12. $\ln(x^3 - x^2) - \ln(x-1) = \ln(x^2(x-1)) - \ln(x-1) = \ln(x^2) + \ln(x-1) - \ln(x-1) = 2\ln(x)$.

Éléments de correction - Exercice 51

1. On a

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{5x+3}}}{\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-3x+1}}\\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{5x+3}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{(3x)+(-3x+1)}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(5x+3)}}{\mathrm{e}}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(5x+3)-1}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

de la forme $A = \mathrm{e}^y$ avec $y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

2. On a

$$\begin{aligned}B &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2\times 24}{\mathrm{e}^3}\times \mathrm{e}^2\right)\\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{2-3+2}\times 24\right)\\ &= \ln(\mathrm{e}\times 24)\\ &= \ln \mathrm{e} + \ln 24\\ &= 1+\ln(4\times 6)\\ &= 1+\ln(4)+\ln(6)\\ &= 1+\ln\left(2^2\right)+\ln(2\times 3)\\ &= 1+2\ln(2)+\ln(2)+\ln(3)\\ &= 1+3\ln(2)+\ln(3)\end{aligned}$$

de la forme $B = m + n\ln 2 + p\ln 3$ avec $m = 1, n = 3$ et $p = 1$.

Éléments de correction - Exercice 52

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{-2}\\ x &= -2.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{-2\}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}\\ \mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^1\\ x &= 1.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x+2} &= \mathrm{e}^3\\ x+2 &= 3\\ x &= 1.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2x+1} &= 2\\ 2x+1 &= \ln(2)\\ 2x &= \ln(2)-1\\ x &= \frac{\ln(2)-1}{2}.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{\ln(2)-1}{2}\right\}$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= 1\\ x &= \ln(1)\\ x &= 0.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{0\}$.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + 4 &= 0 \\ \mathrm{e}^x &= -4. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^x > 0$, donc l'équation n'admet pas de solution, ce qui signifie que l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2} &= \mathrm{e} \\ x^2 &= \ln(\mathrm{e}) \\ x^2 &= 1 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 \\ x &= 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-1, 1\}$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2+1} &= 1 \\ x^2 + 1 &= \ln(1) \\ x^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Or $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 > 0$. En particulier, $x^2 + 1$ ne peut être nul, ce qui entraîne que l'équation n'a pas de solution.

Éléments de correction - Exercice 53

Dans tout cet exercice, on reconnaîtra des équations produits, obtenues après factorisation des expressions proposées ou en faisant apparaître des trinômes.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x + 3) &= 0 \\ \mathrm{e}^x - 3 &= 0 \text{ ou } \mathrm{e}^x + 3 = 0 \\ ex &= 3 \text{ ou } \mathrm{e}^x = -3 \\ x &= \ln(3) \end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^x = -3$ est impossible (exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives). Ainsi, l'ensemble des solutions est $\{\ln(3)\}$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. On peut diviser par $\mathrm{e}^x > 0$:

$$\begin{aligned} (3x+1)\mathrm{e}^x &= 0 \\ 3x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. On peut diviser par $\mathrm{e}^x > 0$ comme avant (l'équation devient alors $2x - 1 = 1$ *(et pas* $2x - 1 = 0$, *car* $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 1$*)* ou factoriser par e^x. Optons pour la deuxième méthode, pour changer.

$$\begin{aligned} (2x-1)\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^x \\ (2x-1)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x &= 0 \\ (2x-2)\mathrm{e}^x &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 \text{ ou } \mathrm{e}^x = 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

car $\mathrm{e}^x = 0$ est impossible. Finalement, l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} x\mathrm{e}^{x+3} &= 2\mathrm{e}^{x+3} \\ x\mathrm{e}^{x+3} - 2\mathrm{e}^{x+3} &= 0 \\ (x-2)\mathrm{e}^{x+3} &= 0 \\ x - 2 &= 0 \text{ ou } \mathrm{e}^{x+3} = 0 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{2\}$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $-\mathrm{e}^{x^2+3} < 0$ et $\frac{1}{\mathrm{e}^{x+3}}$, l'équation n'a pas de solution. Autrement dit, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $\mathrm{e}^{4x} > 0$ et $\mathrm{e}^{x} > 0$, l'équation n'a pas de solution. Autrement dit, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$. Posons $X = \mathrm{e}^{3x}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{6x} - 4\mathrm{e}^{3x} + 4 &= 0 \\ (\mathrm{e}^{3x})^2 - 4\mathrm{e}^{3x} + 4 &= 0 \\ X^2 - 4X + 4 &= 0 \\ (X-2)^2 &= 0 \\ X - 2 &= 0 \\ X &= 2 \\ \mathrm{e}^{3x} &= 2 \\ 3x &= \ln(2) \\ x &= \frac{\ln(2)}{3}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\ln(2)}{3}\right\}$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 9\mathrm{e}^{-2x} - 6 + \mathrm{e}^{2x} &= 0 \\ \frac{9}{\mathrm{e}^{2x}} - 6 + \mathrm{e}^{2x} &= 0 \\ 9 - 6\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{4x} &= 0 \\ (\mathrm{e}^{2x})^2 - 6\mathrm{e}^{2x} + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Posons $X = \mathrm{e}^{2x}$. On a

$$\begin{aligned} 9\mathrm{e}^{-2x} - 6 + \mathrm{e}^{2x} &= 0 \\ X^2 - 6X + 9 &= 0 \\ (X-3)^2 &= 0 \\ X &= 3 \\ \mathrm{e}^{2x} &= 3 \\ 2x &= \ln(3) \\ x &= \frac{\ln(3)}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\ln(3)}{2}\right\}$.

9. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a, en multipliant par e^{x},

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x} - 3 + 2\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2 &= 0 \\ (\mathrm{e}^{x})^2 - 3\mathrm{e}^{x} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Posons $X = \mathrm{e}^x$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 3 + 2\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ X^2 - 3X + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est $(-3)^2 - 4 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$ et ses racines sont $\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 3 + 2\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ X = 1 &\text{ ou } X = 2 \\ \mathrm{e}^x = 1 &\text{ ou } \mathrm{e}^x = 2 \\ x = 0 &\text{ ou } x = \ln(2). \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{0, \ln(2)\}$.

Éléments de correction - Exercice 54

1. $\ln(1+3x)$ existe si et seulement si $1 + 3x > 0$ c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{3}$.
   $\ln(x+1)$ existe si et seulement si $1 + x > 0$ c'est-à-dire $x > -1$.
   Finalement, le domaine de définition de l'équation est $D = \left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[\cap]-1\,;\,+\infty[= \left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.
   Soit $x \in D$.

   $$\begin{aligned} \ln(1+3x) &= \ln(x+1) \\ 1 + 3x &= x + 1 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

   Puisque $0 \in D$, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{0\}$.
2. $\ln(2x+1)$ existe si et seulement si $2x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -\dfrac{1}{2}$.
   $\ln(x^2 - 1)$ existe si et seulement si $x^2 - 1 > 0$, c'est-à-dire $(x-1)(x+1) > 0$, donc pour $x < -1$ ou $x > 1$ (on a un trinôme dont le coefficient dominant est positif, donc il est positif sauf entre ses racines).
   Donc le domaine de définition de l'équation est $D = \left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[\cap (]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[) =]1\,;\,+\infty[$.
   Soit $x \in D$. On a

   $$\begin{aligned} \ln(2x+1) &= \ln(x^2-1) \\ 2x + 1 &= x^2 - 1 \\ x^2 - 2x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

   Le discriminant du trinôme obtenu est 12, donc ses racines sont $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$ (on a utilisé $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ pour simplifier le résultat obtenu avec les formules sur les trinômes). Il reste à vérifier si ces racines sont dans D. On a $1 - \sqrt{3} \leq 1$, donc $1 - \sqrt{3} \notin D$. De plus, $1 + \sqrt{3} > 1$, donc $1 + \sqrt{3} \in D$. Finalement, l'unique solution de l'équation est $\left\{1 + \sqrt{3}\right\}$.
3. $\ln(x-3)$ existe si et seulement si $x - 3 > 0$, c'est-à-dire $x > 3$. Le domaine de définition de l'équation est donc $D =]3\,;\,+\infty[$.
   Soit $x \in D$.

   $$\begin{aligned} \ln(x-3) - 1 &= 0 \\ \ln(x-3) &= 1 \\ x - 3 &= \mathrm{e}^1 \\ x &= 3 + \mathrm{e} \end{aligned}$$

   Or $3 + \mathrm{e} > 3$, donc $3 + \mathrm{e} \in D$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3 + \mathrm{e}\}$.

4. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.
$\ln(x-1)$ existe si et seulement si $x - 1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$.
Donc le domaine de définition de l'équation est $D =]0\,;\,+\infty[\cap]1\,;\,+\infty[=]1\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x) + \ln(x-1) &= 0\\ \ln(x(x-1)) &= 0\\ x(x-1) &= \mathrm{e}^0\\ x^2 - x &= 1\\ x^2 - x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Or le discriminant du trinôme obtenu vaut 5, donc ses racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'après l'indication, la première n'appartient pas à D tandis que la seconde si. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5. $\ln(4-x)$ existe si et seulement $4 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 4$. Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $D =]-\infty\,;\,4[$.
Soir $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(4-x) &= 0\\ 4 - x &= \mathrm{e}^0\\ 4 - x &= 1\\ x &= 3\end{aligned}$$

Or $3 \in D$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3\}$.

6. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. De plus, $\ln(1-x)$ existe si et seulement si $1 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 1$. Ainsi, l'ensemble de définition de l'équation est $D =]0\,;\,+\infty[\cap]-\infty\,;\,1[=]0\,;\,1[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(x) - \ln(1-x) &= \ln(2)\\ \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) &= \ln(2)\\ \frac{x}{1-x} &= 2\\ x &= 2(1-x)\\ x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Or $\frac{2}{3} \in D$, donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

7. $\ln(2x+1)$ existe si et seulement si $x > -\frac{1}{2}$, $\ln(x-3)$ existe si et seulement si $x > 3$ et $\ln(x+5)$ existe si et seulement si $x > -5$. Donc l'ensemble de définition de l'équation est $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[\cap]3\,;\,+\infty[\cap]-5\,;\,+\infty[=]3\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}\ln(2x+1) + \ln(x-3) &= \ln(x+5)\\ \ln((2x+1)(x-3)) &= \ln(x+5)\\ (2x+1)(x-3) &= x+5\\ 2x^2 - 5x - 3 &= x + 5\\ 2x^2 - 6x - 8 &= 0\\ x^2 - 3x - 4 &= 0\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu est 25, donc ses racines sont -1 et 4. Or $-1 \notin D$ et $4 \in D$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{4\}$.

8. $\ln(x-1)$ existe si et seulement si $x > 1$, $\ln(2-x)$ existe si et seulement si $x < 2$ et $\ln(6x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $D =]1\,;+\infty[\cap]-\infty\,;2[\cap]0\,;+\infty[=]1\,;2[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x-1)+\ln(2-x) &= \ln(6x) \\ \ln((x-1)(2-x) &= \ln(6x) \\ (x-1)(2-x) &= 6x \\ -x^2+3x-2 &= 6x \\ -x^2-3x-2 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu est 1, donc ses racines sont -2 et -1. Or $-2 \notin D$, $-1 \notin D$, donc l'équation n'admet pas de solution.

9. $\ln(x-2)$ existe si et seulement si $x > 2$. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Donc l'ensemble de définition de l'équation est $D =]0\,;+\infty[\cap]2\,;+\infty[=]2\,;+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x-2)+\ln(x) &= \ln(3) \\ \ln((x-2)x) &= \ln(3) \\ (x-2)x &= 3 \\ x^2-2x-3 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu est 16, donc ses racines sont -1 et 3. Or $-1 \notin D$ et $3 \in D$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{3\}$.

10. $\ln(x(x-2))$ existe si et seulement si $x(x-2) > 0$. Or,

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D =]-\infty\,;0[\cup]2\,;+\infty[$.
Soit $x \in D$. Les calculs à faire sont les mêmes qu'à la question précédente, on obtient comme solutions potentielles -1 et 3. Or $-1 \in D$ et $3 \in D$, donc l'ensemble des solutions est $\{-1,3\}$.
Notons que les calculs pour déterminer les solutions pour cette question sont les mêmes que pour la question précédente. Pourtant les ensembles de définition des équations sont distincts, les ensembles de solutions aussi.

11. $\ln(x^2+5x+6)$ existe si et seulement si $x^2+5x+6 > 0$. Le discriminant du trinôme est 1, donc ses racines sont -3 et -2, donc il est strictement positif sur $]-\infty\,;-3[\cup]-2\,;+\infty[$ (on rappelle qu'un polynôme est du signe de son coefficient sauf entre ses racines). De plus $\ln(x+11)$ existe si et seulement si $x > -11$, donc l'ensemble de définition de l'équation est $D =]-11\,;+\infty[\cap (]-\infty\,;-3[\cup]-2\,;+\infty[) =]-11\,;-3[\cup]-2\,;+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x^2+5x+6) &= \ln(x+11) \\ x^2+5x+6 &= x+11 \\ x^2+4x-5 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme est 36, ses racines sont -5 et 1. Or $-5 \in D$, $1 \in D$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{-5,1\}$.

12. Le domaine de définition de l'équation est $D =]0\,;+\infty[$. Soit $x \in D$. Posons $X = \ln(x)$. L'équation proposée se réécrit $2X^2+3X-2 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est 25, ses racines sont -2 et $\dfrac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned}2\ln(x)^2+3\ln(x)-2&=0\\ 2X"2+3X-2&=0\\ X=-2 \text{ ou } X&=\frac{1}{2}\\ \ln(x)=-2 \text{ ou } \ln(x)&=\frac{1}{2}\\ x=\mathrm{e}^{-2} \text{ ou } x&=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\\ x=\frac{1}{\mathrm{e}^2} \text{ ou } x&=\sqrt{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

Les deux valeurs obtenues appartiennent à D, donc l'ensemble des solutions est $\left\{\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}, \sqrt{\mathrm{e}}\right\}$.

Éléments de correction - Exercice 55

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2x}&>\mathrm{e}^{-2}\\ 2x&>-2\\ x&>\frac{-2}{2}\\ x&>-1.\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $]-1\,;+\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-3x}&<\mathrm{e}\\ \mathrm{e}^{-3x}&<\mathrm{e}^1\\ -3x&<1\\ x&>\frac{-1}{3}.\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left]-\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

3. L'équation n'admet pas de solution car exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.
4. L'équation admet tous les réels comme solution puisque la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Donc l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}$.
5. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{3x-5}&\geq 3\\ 3x-5&\geq \ln(3)\\ 3x&\geq \ln(3)+5\\ x&\geq \frac{\ln(3)+5}{3}.\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{\ln(3)+5}{3}\,;+\infty\right[$.

6. Tous les réels sont solutions de l'équation car exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Autrement dit, l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{-2x-1} &\leq 1 \\ -2x-1 &\leq \ln(1) \\ -2x-1 &\leq 0 \\ -2x &\leq 1 \\ x &\geq \frac{1}{-2}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

8. La fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

Éléments de correction - Exercice 56

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{x+1} &< 1 \\ x+1 &< \ln(1) \\ x+1 &< 0 \\ x &< -1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty\,;\,-1[$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} -3e^{x^2-4} &> 4 \\ e^{x^2-4} &< \frac{4}{-3} && \text{(on divise par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change !)} \end{aligned}$$

Or la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, donc l'inéquation précédente n'est jamais vérifiée. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\emptyset$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{x+4} &\leq \frac{1}{e^{3x}} \\ e^{x+4}e^{3x} &\leq 0 \end{aligned}$$

Or la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, donc l'inéquation précédente n'est jamais vérifiée. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\emptyset$.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $e^x > 0$, on peut diviser l'inéquation par e^x, d'où

$$\begin{aligned} (x-1)e^x &> 0 \\ x-1 &> 0 \\ x &> 1. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $]1\,;\,+\infty[$.

$$\begin{aligned} (-2x+3)e^x &< 0 \\ -2x+3 &< 0 \\ -2x &< -3 \\ x &> \frac{-3}{-2}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $\mathrm{e}^{-2x+5} > 0$, on peut diviser l'inéquation par e^{-2x+5}, d'où

$$\begin{aligned} x^2\mathrm{e}^{-2x+5} &> 0 \\ x^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Or un carré est toujours positif, donc l'inéquation est toujours vérifiée. Ainsi, l'ensemble des solution est $\mathbf{R}$.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $\mathrm{e}^x > 0$, on peut multiplier par e^x, donc

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{\mathrm{e}^x} &\leq 0 \\ x-4 &\leq 0 \\ x &\leq 4. \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,4]$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$. En posant $X = \mathrm{e}^x$, l'inéquation se ramène à $X^2 - 7X + 12 > 0$. Les racines du trinôme obtenu sont 4 et 3 (on les obtient en calculant le discriminant puis en appliquant les formules usuelles sur les trinômes). Puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 1, positif) sauf entre ses racines, on en déduit que $X^2 - 7X + 12$ est strictement positif si et seulement si $X < 3$ ou $X > 4$. Or $\mathrm{e}^x < 3$ si et seulement si $x < \ln(3)$ et $\mathrm{e}^x > 4$ si et seulement si $x > \ln(4)$. Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty\,;\,\ln(3)[\,\cup\,]\ln(4)\,;\,+\infty[$.

8. Soit $x \in \mathbf{R}$. En posant $X = \mathrm{e}^x$, l'inéquation se ramène à $X^2 + X - 6 > 0$. Les racines du trinôme obtenu sont 2 et -3 (on les obtient en calculant le discriminant puis en appliquant les formules usuelles sur les trinômes). Puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant (ici 1, positif) sauf entre ses racines, on en déduit que $X^2 - 7X + 12$ est strictement positif si et seulement si $X < -3$ ou $X > 2$. Or $\mathrm{e}^x < -3$ n'admet pas de solution (car la fonction exponentielle ne prend que des valeur strictement positives) et $\mathrm{e}^x > 2$ si et seulement si $x > \ln(2)$. Finalement, l'ensemble des solutions est $\emptyset \cup\,]\ln(2)\,;\,+\infty[\; = \;]\ln(2)\,;\,+\infty[$.

Éléments de correction - Exercice 57

1. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, donc le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x) &\leq 3 \\ x &\leq \mathrm{e}^3 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]-\infty\,;\,3] =]0\,;\,3]$.

2. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, donc le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x) &> \mathrm{e} \\ x &> \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{\mathrm{e}} > 0$ (car la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives). Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[\; = \;]\mathrm{e}^{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[$.

3. $\ln(2x-1)$ existe si et seulement si $2x - 1 > 0$, à savoir $x > \dfrac{1}{2}$. Ainsi, le domaine de définition de l'inéquation est $D = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(2x-1) &> -1 \\ 2x - 1 &> \mathrm{e}^{-1} \\ x &> \frac{\mathrm{e}^{(-1} + 1}{2} \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{-1} > 0$, on obtient que $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2} > 0$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{2} + \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $D \cap \left]\dfrac{\mathrm{e}^{(-1}+1}{2}\,;\,+\infty\right[= \left]\dfrac{\mathrm{e}^{(-1}+1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

4. $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$ existe si et seulement si $1+\dfrac{2}{x} > 0$, à savoir $\dfrac{x+2}{x} > 0$. Or,

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	‖	$+$	
$\dfrac{x+2}{x}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Donc l'ensemble de définition de l'inéquation est $D =]-\infty\,;\,-2[\cup]0\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
\ln(\left(1+\frac{2}{x}\right) &\geq \ln(3)\\
\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) &\geq \ln(3)\\
\frac{x+2}{x} &\geq 3\\
\frac{x+2}{x} - 3 &\geq 0\\
\frac{2+x-3x}{x} &\geq 0\\
\frac{2-2x}{x} &\geq 0\\
\frac{1-x}{x} &\geq 0 && \text{en divisant par 2}
\end{aligned}$$

Or,

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	‖	$+$		$+$	
$\dfrac{1-x}{x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions est $]0\,;\,1] \cap D =]0\,;\,1]$.
Notons qu'on ne pas transformer $\dfrac{x+2}{x} \geq 3$ *en* $x+2 \geq 3x$*, car on multiplie par* x *l'inéquation mais on ne connaît pas son signe (on ne sait donc pas s'il faut changer ou non le sens de l'inéquation !)*

5. $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$, $\ln(x^2-2x)$ existe si et seulement si $x^2-2x > 0$. Or $x^2-2x = x(x-2)$, donc les racines de ce trinôme sont 0 et 2. Or un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines, donc $x^2-2x > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty\,;\,0[\cup]2\,;\,+\infty[$. Ainsi, le domaine de définition de D est l'intersection des deux ensembles obtenus, à savoir $D =]2\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
\ln(x) &\leq \ln(x^2-2x)\\
x &\leq x^2-2x\\
x^2-3x &\geq 0\\
x(x-3) &\geq 0
\end{aligned}$$

Or,

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On aurait aussi pu utiliser, de manière plus rapide, que les racines de ce trinôme sont 0 *et* 3 *pour en déduire immédiatement son signe.*
Donc l'ensemble des solutions est $D \cap [3\,;\,+\infty[= [3\,;\,+\infty[$.

6. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]-2\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x+2) &\geq 0 \\ x+2 &\geq \mathrm{e}^0 \\ x+2 &\geq 1 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap [-1\,;\,+\infty[= [-1\,;\,+\infty[$.

7. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]1\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x-1) &< 0 \\ x-1 &< 1 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]-\infty\,;\,2[=]1\,;\,2[$.

8. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]-1\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} 2\ln(x+1) &\leq 0 \\ \ln(x+1) &\leq 0 && \text{on divise par } 2 > 0 \\ x+1 &\leq 1 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap]-\infty\,;\,0] =]-1\,;\,0]$.

9. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} 2\ln(x)+1 &\geq 0 \\ 2\ln(x) &\geq -1 \\ \ln(x) &\geq -\frac{1}{2} \\ x &\geq \mathrm{e}^{-1/2} \\ x &\geq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solution est $D \cap \left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,;\,+\infty\right[= \left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,;\,+\infty\right[$ car $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} > 0$.

10. Le domaine de définition est $D =]-4\,;\,+\infty[$.
Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \ln(x+4) &\geq 0 \\ x+4 &\geq 1 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $D \cap [-3\,;\,+\infty[= [-3\,;\,+\infty[$.

11. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0\,;+\infty[$. On a une inéquation produit, on cherche donc le signe de chaque facteur.

$$\begin{aligned}\ln(x) &\geq 0\\ x &\geq 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}2-\ln(x) &\geq 0\\ \ln(x) &\leq 2\\ x &\leq \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Ainsi, les deux résolutions précédentes nous informent où mettre les « + » dans le tableau de signe suivant :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x)(2-\ln(x))$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions est $\left[1\,;\mathrm{e}^2\right]$.

12. Le domaine de définition de l'inéquation est $D =]0\,;+\infty[$. Soit $x \in D$. Posons $X = \ln(x)$. On a :

$$\begin{aligned}\ln(x)^2 + 4\ln(x) + 4 &\geq 0\\ X^2 + 4X + 4 &\geq 0\\ (X+2)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

On obtient une inéquation toujours vraie, donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est D.

Éléments de correction - Exercice 58

Dans cet exercice, on cherche souvent le signe de $\ln(a)$, où $a > 0$. On rappelle que $\ln(a) < 0$ si et seulement si $a \in]0\,;1[$ et $\ln(a) > 0$ si et seulement si $a > 1$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}3^n &> 125\\ \ln(3^n) &> \ln(125)\\ n\ln(3) &> \ln(5^3)\\ n &> \frac{3\ln(5)}{\ln(3)} && \text{car } \ln(3) > 0\end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\dfrac{3\ln(5)}{\ln(3)}$.

Attention, l'inconnue est ici un nombre entier. Le nombre $\dfrac{3\ln(5)}{\ln(3)}$ n'étant pas entier, il n'est pas la solution du problème.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}5^n &\geq 10\ 000\\ \ln(5^n) &\geq \ln(10^4)\\ n\ln(5) &\geq 4\ln(10)\\ n &\geq \frac{4\ln(2\times 5)}{\ln(5)} && \text{car } \ln(5) > 0\\ n &\geq \frac{4\ln(2)}{\ln(5)} + 4.\end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{4\ln(2)}{\ln(5)} + 4$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
0,5^n &< 0,01 \\
n\ln(0,5) &< \ln(10^{-2}) \\
-n\ln(2) &< -2\ln(10) \\
n &> \frac{2\ln(10)}{\ln(2)} && \text{car } -\ln(2) < 0 \\
n &> \frac{2\ln(5)}{\ln(2)} + 2.
\end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\dfrac{2\ln(5)}{\ln(2)} + 2$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^n &\leq 10^{-4} \\
n\ln\left(\frac{2}{3}\right) &\leq -4\ln(10) \\
n &\geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(\frac{2}{3})} && \text{car } \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \\
n &\geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(2)-\ln(3)}n && \geq \frac{4\ln(10)}{\ln(3)-\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{4\ln(10)}{\ln(3)-\ln(2)}$.

5. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
2^{n-6} &> 100 \\
(n-6)\ln(2) &> \ln(10^2) \\
n\ln(2) &> 2\ln(10) + 6\ln(2) \\
n &> \frac{2\ln(10)}{\ln(2)} + 6 && \text{car } \ln(2) > 0 \\
n &> 2 + \frac{2\ln(5)}{\ln(2)} + 6 \\
n &> 8 + \frac{2\ln(5)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $8 + \dfrac{2\ln(5)}{\ln(2)}$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
0,8^n &\leq 0,05 \\
n\ln(0,8) &\leq \ln(0,05) \\
n &\geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,8)} && \text{car } \ln(0,8) < 0 \\
n &\geq \frac{\ln(\frac{1}{20})}{\ln(\frac{4}{5})} \\
n &\geq \frac{-\ln(20)}{\ln(4)-\ln(5)}
\end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{\ln(20)}{\ln(5)-\ln(4)}$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
1 - 0,3^n &> 0,95 \\
-0,3^n &> \frac{19}{20} - 1 \\
0,3^n &< \frac{1}{20} && \text{car } -1 < 0 \\
n \ln\left(\frac{3}{10}\right) &< \ln\left(\frac{1}{20}\right) \\
n &> \frac{-\ln(20)}{\ln(3) - \ln(10)} && \text{car } \ln\left(\frac{3}{10}\right) < 0 \\
n &> \frac{\ln(20)}{\ln(10) - \ln(3)}
\end{aligned}$$

Attention, ln *est définie sur* $\mathbf{R}_+^\star$, *donc il est faux de composer directement* $-0,3^n$ *par* ln.

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\dfrac{\ln(20)}{\ln(10) - \ln(3)}$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}
\frac{4^n}{5^{n-1}} &< 1 \\
\left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1}{5} &< 1 \\
\left(\frac{4}{5}\right)^n &< 5 && \text{car } 5 > 0 \\
n \ln\left(\frac{4}{5}\right) &< \ln(5) \\
n &> \frac{\ln(5)}{\ln(4) - \ln(5)}.
\end{aligned}$$

Donc l'entier n cherché est le premier entier strictement supérieur à $\dfrac{\ln(5)}{\ln(4) - \ln(5)}$.

Éléments de correction - Exercice 59

1. $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}$.

2. On factorise par 2^{21} : $2^{21} + 2^{22} = 1 \cdot 2^{21} + 2 \cdot 2^{21} = 2^{21} \cdot (1+2) = 2^{21} \cdot 3$.

3. On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \dfrac{(3+1) \cdot 3^{21}}{(3-1) \cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2$.

4. On simplifie avec les règles usuelles et on utilise que $(-a)^n = a^n$ si a est pair :

$$\frac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}.$$

12.8 Dérivation

Éléments de correction - Exercice 60

colorbleu Il est conseillé de débuter les calculs de dérivées en prenant le temps d'écrire les formules, d'identifier les fonctions, les réels utilisés, comme dans les dix premiers corrigés ci-dessous.

1. $f(x) = x \ln(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x, u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x), v'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\
&= \ln(x) + \frac{x}{x} \\
&= \ln(x) + 1
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^x, u'(x) = e^x$ et $v(x) = x, v'(x) = 1$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)e^x}{x^2} \end{aligned}$$

3. $f(x) = \ln(x^2+1) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2+1, u'(x) = 2x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{(u(x)} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

4. $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x+1} = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2+x++1, u'(x) = 2x+1$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\mathrm{e}^{(u(x)} \\ &= (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1} \end{aligned}$$

5. $f(x) = (2x-1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$ donc $f'(x) = 8x - 4$.

6. $f(x) = \dfrac{x^2-5}{x^2+1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x^2-5, u'(x) = 2x$ et $v(x) = x^2+1, v'(x) = 2x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-5)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 10x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{12x}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

7. $f(x) = \ln(e^x+1) = \ln(u(x))$ avec $u(x) = e^x+1, u'(x) = e^x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{(u(x)} \\ &= \frac{e^x}{e^x+1} \end{aligned}$$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x, u'(x) = 1$ et $v(x) = x^2+1, v'(x) = 2x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x), u'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{-1}{x(\ln(x))^2} \end{aligned}$$

10. $f(x) = (e^{2x}+1)^8 = (u(x))^8$ avec $u(x) = e^{2x}+1, u'(x) = 2e^{2x}$. En effet, la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{2x} = e^{v(x)}$ avec $v'(x) = 2x, v'(x) = 2$ est la fonction $x \mapsto v'(x)e^{v(x)} = 2e^{2x}$. D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8u'(x)(u(x))^7 \\ &= 16e^{2x}(e^{2x}+1)^7 \end{aligned}$$

11. $f(x) = (x+2)\ln(x^4+1)$
$f'(x) = \ln(x^4+1) + (x+2)\dfrac{4x^3}{x^4+1}$

12. $f(x) = (3e^{5x}+1)^7$
$f'(x) = 7 \times 3 \times 5e^{5x}(3e^{5x}+1)^6$.

13. $f(x) = \dfrac{1}{2x+5} - \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$.
$f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+5)^2} - \dfrac{2\times(-3)}{x^4} + \dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{-2}{(2x+5)^2} + \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}$

14. $f(x) = (1+\ln(x))^3$
$f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} \times (1+\ln(x))^2 = \dfrac{3}{x}(1+\ln(x))^2$

15. $f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$
$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-4)^2}e^{\frac{1}{x-4}}$

Éléments de correction - Exercice 61

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$
$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{x^2}\right)$

2. $f(x) = \ln(3+e^{ax})$
$f'(x) = \dfrac{ae^{ax}}{3+e^{ax}}$

3. $f(x) = (ax+1)^7$
$f'(x) = 7a(ax+1)^6$

4. $f(x) = \dfrac{x-a}{x+a}$
$f'(x) = \dfrac{x+a-(x-a)}{(x+a)^2} = \dfrac{2a}{(x+a)^2}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{(ax+1)^5}$
$f'(x) = \dfrac{2\times -5a}{(ax+1)^6} = \dfrac{-10a}{(ax+1)^6}$

6. $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 1$
$f'(x) = 3x^2 + 4ax$

7. $f(x) = \ln(\ln(ax))$
$f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(ax)}$

8. $f(x) = e^{ax^2}$
$f'(x) = 2axe^{ax^2}$

9. $f(x) = (e^{ax}+1)^5$
$f'(x) = 5ae^{ax}(e^{ax}+1)^4$

Éléments de correction - Exercice 62

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_K est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x, f'_K(x) = Kae^{ax} = aKe^{ax} = af_K(x)$. Ainsi, f_K appartient à $\mathcal{F}$.

2. Comme g appartient à $\mathcal{F}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction p est donc un quotient de fonctions dérivables avec la fonction au dénominateur ne s'annulant jamais donc p est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{g'(x)\mathrm{e}^{ax} - g(x)a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax})^2} \quad \text{formules de dérivation d'un produit et d'une composée} \\ &= \frac{ag(x)\mathrm{e}^{ax} - g(x)a\mathrm{e}^{ax}}{(\mathrm{e}^{ax})^2} \quad \text{car } g \text{ appartient à } \mathcal{F} \text{ donc vérfie } g' = ag \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $p' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe une constante K réelle telle que pour tout réel $x, p(x) = K$ c'est à dire $\dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}} = K$ d'où $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$.

3. On a montré que toute fonction de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{ax}$ où K est un réel, appartient à $\mathcal{F}$ et que, réciproquement, toute fonction appartenant à $\mathcal{F}$ est nécessairement de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{ax}$ où K est un réel. Ainsi :

$$\mathcal{F} = \{x \mapsto K\mathrm{e}^{ax} \text{ où } K \text{ est un réel }\}.$$

Éléments de correction - Exercice 63

1. $f(x) = (x^3 - 1)^4$
$f'(x) = 4 \times 3x^2 \times (x^3 - 1)^3 = 12x^2(x^3 - 1)^3$.

2. $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x}$
$f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{x+1}{x^2}$.

3. $f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{-x^2}$
$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} + (x^2 + 1)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (1 - x^2 - 1)2x\mathrm{e}^{-x^2} = -x^2 2x\mathrm{e}^{-x^2}$

4. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$

5. $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$
$f'(x) = (\ln(x) + x\dfrac{1}{x})\mathrm{e}^{x\ln(x)} = (\ln(x) + 1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

6. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$
$f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2 - \mathrm{e}^{-2x}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$
$f'(x) = \dfrac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}$

Éléments de correction - Exercice 64

1. $f; x \mapsto x^3 - 3x + 1$, $a = 0$.
Pour tout réel $x, f'(x) = 3x^2 - 3$ donc $f'(0) = -3$. De plus, $f(0) = 1$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = -3(x - 0) + 1$ c'est à dire $y = -3x + 1$.

2. $f; x \mapsto \dfrac{x^2}{3x - 9}$, $a = 1$.
Pour tout réel $x, f'(x) = \dfrac{2x(3x - 9) - 3x^2}{(3x - 9)^2}$ donc $f'(1) = \dfrac{-15}{36} = \dfrac{-5}{12}$. De plus, $f(1) = \dfrac{-1}{6}$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = \dfrac{-5}{12}(x-1) + \dfrac{-1}{6} = \dfrac{-5}{12}x + \dfrac{5}{12} + \dfrac{-2}{12}$ c'est à dire $y = \dfrac{-5}{12}x + \dfrac{1}{4}$.

3. $f ; x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$, $a = 2$.
Pour tout réel $x, f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ donc $f'(2) = -2$. De plus, $f(2) = 3$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = -2(x-2)+3$ c'est à dire $y = -2x+7$.

4. $f ; x \mapsto x+2+\dfrac{4}{x-2}$, $a = -2$.
Pour tout réel $x, f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-2)^2}$ donc $f'(-2) = 1 - \dfrac{4}{16} = \dfrac{3}{4}$. De plus, $f(-2) = -1$ donc l'équation réduite de la tangente au graphe de f en a est $y = \dfrac{3}{4}(x-(-2))+(-1) = \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}+(-1)$ c'est à dire $y = \dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

Éléments de correction - Exercice 65

Notons, tout d'abord, que le point $A(1;-1)$ appartient au graphe de f si et seulement si ses coordonnées vérifient $y = f(x)$ c'est à dire $-1 = f(1)$. On en déduit que $A(1;-1)$ appartient au graphe de f si et seulement si $-1 = a+2+b$ c'est à dire $a+b = -3$.
On sait que deux droites non verticales sont parallèles lorsqu'elles ont des coefficients directeurs égaux. Ainsi, chercher une tangente au graphe de f parallèle à la droite d'équation réduite $y = -4x$ revient à chercher une tangente dont le coefficient directeur est égal à -4. Or, le coefficient directeur de la tangente au graphe de f en 1 est $f'(1) = 2a+2$. On en déduit que $2a+2 = -4$ d'où $a = -3$ et donc $b = 0$.

Éléments de correction - Exercice 66

Pour tout réel $x, f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ donc $f'(0) = 1$. Comme $f(0) = \ln(1) = 0$, on en déduit que l'équation réduite de la tangente en 0 au graphe de la fonction f est $y = x$.

Éléments de correction - Exercice 67

1. Pour tout réel $a, f'(a) = \dfrac{-1}{a^2} \neq 0$ donc $\mathcal{T}_a$ n'est pas une droite parallèle à l'axe des abscisses. Elle coupe donc cet axe.

2. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_a$ est donnée par $y = \dfrac{-1}{a^2}(x-a)+\dfrac{1}{a}$. Le point B pour abscisse $x_B = 0$ et appartient à $\mathcal{T}_a$ donc son ordonnée est $y_B = \dfrac{-1}{a^2}(0-a)+\dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{a}$ d'où $B\left(0;\dfrac{2}{a}\right)$. Le point A pour ordonnée $y_A = 0$ et appartient à $\mathcal{T}_a$ donc son abscisse vérifie $0 = \dfrac{-1}{a^2}(x_A-a)+\dfrac{1}{a}$ d'où $x_A - a = \dfrac{-1}{a} \times (-a^2) = a$ et ainsi $A\,(2a;0)$.
Le milieu de $[AB]$ a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{0+2a}{2};\dfrac{\frac{2}{a}+0}{2}\right)$ c'est à dire $\left(a;\dfrac{1}{a}\right)$. C'est donc bien le point M qui a pour abscisse a et qui, appartenant au graphe de f, a pour ordonnée $\dfrac{1}{a}$

Éléments de correction - Exercice 68

Pour tout réel $x, f'(x) = 2ax$ donc la pente de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1+x_2 est $f'(x_1+x_2) = a(x_1+x_2)$.
La pente de la droite joignant les points de coordonnées $A(x_1;ax_1^2)$ et $B(x_2;ax_2^2)$ est

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{ax_2^2-ax_1^2}{x_2-x_1} = a\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1} = a(x_1+x_2)$$

car $x_2^2-x_1^2 = (x_2-x_1)(x_1+x_2)$. On retrouve la même pente que celle de la la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_1+x_2 : ces deux droites sont donc parallèles.

Éléments de correction - Exercice 69

1. $A = \frac{4}{7} + \left(\frac{13}{28} - \frac{5}{14}\right) = \frac{4}{7} + \frac{13 - 2 \times 5}{28} = \frac{4}{7} - \frac{2}{28} = \frac{4 \times 4 + 3}{28} = \frac{19}{28}$.
2. $B = 2 - \left(\frac{7}{15} - \frac{3}{10}\right) = 2 - \frac{7 \times 2 - 3 \times 3}{30} = 2 - \frac{5}{30} = 2 - \frac{1}{6} = \frac{2 \times 6 - 1}{6} = \frac{11}{6}$.
3. $C = \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{5 \times 2 - 3 \times 3}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4 - 1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
4. $D = \frac{7a}{5} - \frac{2a}{5} = \frac{7a - 2a}{5} = \frac{5a}{5} = a$.
5. $E = a - \frac{a}{5} = \frac{5a - a}{5} = \frac{4a}{5}$.
6. $F = 2 + \frac{a}{b} - \frac{a}{3b} = \frac{2 \times 3b + 3a - a}{3b} = \frac{6b + 2a}{3b}$.

12.9 Variations d'une fonction

Éléments de correction - Exercice 70

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -2x + 4$. De plus, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) \geq 0 \iff -2x \geq -4 \iff x \leq 2 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0 \iff x = 2.$$

Notons qu'on résout une inéquation pour savoir où placer les signes dans le tableau de signe, mais qu'il faut en plus résoudre une équation pour savoir où placer les zéros (en pratique on ne détaille que la résolution de l'inéquation et on donne directement la réponse pour l'équation) si on veut parfaitement rédiger. Toutefois, on se permet d'aller parfois plus vite lorsqu'on cherche le signe d'une fonction affine.

En résumé,

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

De plus, on a $f(2) = 9$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (il n'y a pas de forme indéterminée) et, puisque pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(-1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Finalement,

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 3$. Pour trouver le signe de cette expression, on factorise, ce qui donne pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = -3(x^2 - 1) = -3(x - 1)(x + 1) = 3(1 - x)(x + 1).$$

Ainsi, on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$3(1-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

De plus, $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$. Enfin, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(-1+\dfrac{3}{x^2}\right)$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. En résumé,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Le discriminant de ce trinôme vaut 16, donc ses racines sont 1 et $-\dfrac{1}{3}$. Puisqu'un trinôme est du même signe que son coefficient dominant sauf entre ses racines, on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

De plus, on a $f(1) = 0$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{32}{27}$. Comme pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Finalement,

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 4x^3 + 16x = 4x(x^2+4)$. La forme étant factorisée, on obtient aisément son signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$	
x^2+4		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

De plus, on a $f(0) = 8$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Finalement,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

5. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = x-1$. Les fonctions u et v sont dérivables et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x)$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1\cdot(x-1) - (x+2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Or $-3 < 0$, $(x-1)^2 > 0$, donc par quotient $f'(x) < 0$. *Notons qu'on n'a pas développé le dénominateur : c'est un carré, on sait déjà qu'il est positif !* Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$. Ainsi,

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	

De plus, par simples opérations, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Enfin, pour tout $x \notin \{0,1\}$, $f(x) = \dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ et on obtient avec cette forme que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	1 $\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	1

Attention, f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$, puisque par exemple $f(0) = -2 < 4 = f(2)$. Cela n'est pas contradictoire, car le théorème qui donne le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction n'est valable que sur un intervalle.
Il faut bien marquer avec une double barre la valeur qui n'appartient pas au domaine de définition (parfois appelée « valeur interdite »). On retrouve alors bien que la fonction est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]-1\,;\,+\infty[$ (on a deux flèches distinctes).

6. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = -4x$ et $v(x) = x^2+1$. Les fonctions u et v sont dérivables et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $u'(x) = -4$ et $v'(x) = 2x$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{-4(x^2+1)-(-4x)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2-4+8x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}.$$

Il faut maintenant étudier le signe de la dérivée. Pour cela, on factorise *(c'est toujours une bonne idée quand on cherche un signe, voir la leçon sur la résolution d'inéquations).*

$$f'(x) = \frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

On a alors le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$4(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

De plus, pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{-4}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Sous cette forme, on obtient $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Finalement, puisque $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$,

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

7. On a pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = x^2-x-2$ et $v(x) = x^2-2x+1$. Les fonctions u et v sont dérivables avec, pour tout $x \neq 1$, $u'(x) = 2x-1$ et $v'(x) = 2x-2$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$ et pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-2x+1)-(x^2-x-2)(2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{-x^2+6x-5}{(x-1)^4}.$$

On veut factoriser l'expression obtient. Le trinôme $-x^2+6x-5$ a un discriminant qui vaut 16 et ses racines sont 1 et 5. Or un discriminant est du signe de son coefficient dominant (ici négatif) sauf entre ses racines, d'où

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-x^2+6x-5$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$(x-1)^4$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Par simples opérations, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. De plus, pour tout $x \notin \{0,1\}$,

$$f(x) = \frac{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Sous cette forme, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Finalement, comme $f(5) = \frac{9}{4}$,

x	$-\infty$		1			5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		$+$	0	$-$	
f	1	↘	$-\infty$ ‖	$-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	1

8. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ est de la forme $\dfrac{1}{u}$, avec $u : x \longmapsto x-2$, donc est dérivable de dérivée $-\dfrac{u'}{u^2}$, à savoir $x \longmapsto -\dfrac{1}{(x-2)^2}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{2\}$ et que, pour tout $x \neq 2$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2)^2-2^2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-2-2)(x-2+2)}{(x-2)^2} && \text{(identité remarquable)} \\ &= \frac{(x-4)x}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

De plus, on obtient par simples opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. Finalement, comme $f(0) = -3$ et $f(4) = 5$,

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Éléments de correction - Exercice 71

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$. Puisque la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives, $f'(x) < 0$. Ainsi,

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

(les limites s'obtiennent par simples opérations).

Éléments de correction - Exercice 72

La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2}$. De plus, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & \geq & 0 \\ \dfrac{-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} & \geq & 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} & \geq & 2 \times 0 \\ \mathrm{e}^{x} & \geq & \mathrm{e}^{-x} \\ x & \geq & -x \\ 2x & \geq & 0 \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Et de même, on montre que $f'(x) = 0$ admet 0 comme unique solution. Ainsi,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(les limites s'obtiennent par simples opérations).

Éléments de correction - Exercice 73

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ *(on rappelle que la fonction carrée est définie sur $\mathbf{R}_+$ mais elle n'est pas dérivable en 0)* et,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{25x^2 + 15x - 4}{2\sqrt{x}}.$$

(on a reconnu la dérivée d'un produit).

2. Soit $x > 0$. Le discriminant de $25x^2 + 15x - 4$ vaut 25, donc les racines de ce trinôme sont $-\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{1}{5}$. Ainsi, puisque le signe d'un trinôme est celui de son coefficient dominant sauf entre ses racines, on a :

x	0		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{14\sqrt{5}}{25}$	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par simples opérations.

Éléments de correction - Exercice 74

La fonction f est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + 1$$

(on a appliqué la formule de dérivation d'un produit).
Pour déterminer le signe de cette expression, la première idée est de la factoriser :

$$f'(x) = \frac{1 + x\ln(x) + x}{x}$$

Le problème est que le signe du numérateur semble difficile à obtenir ! Nous allons donc procéder autrement ici.
Soit $x > 1$. On a $\frac{1}{x} > 0$, $\ln(x) > 0$, $1 > 0$, donc, par somme de nombres strictement positifs, $f'(x) > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

Éléments de correction - Exercice 75

La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 5.$$

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ \frac{2}{x} - 5 &\geq 0 \\ \frac{2}{x} &\geq 5 \\ \frac{x}{2} &\leq \frac{1}{5} && \text{par décroissance de l'inverse sur }]0\,;\,+\infty[\\ x &\leq \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Ainsi,

x	0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

donc la fonction f est croissante sur $\left]0\,;\,\frac{2}{5}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{2}{5}\,;\,+\infty\right[$.

Éléments de correction - Exercice 76

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $x \in]0\,;\,1[$. Puisque $x > 0$ et $\mathrm{e}^{n(x-1)} > 0$ (la fonction exponentielle ne prenant que des valeurs strictement positives), on a $f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)} > 0$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $]0\,;\,1[$ et, pour $x \in]0\,;\,1[$,

   $$f_n'(x) = 1 + n\mathrm{e}^{n(x-1)}.$$

   Dans l'expression précédente, n est fixé (c'est donc une constante) tandis que x est la variable. On dérive donc « par rapport à x »).
   Or $1 > 0$, $n \geq 0$ et $\mathrm{e}^{n(x-1)} > 0$, donc $f_n'(x) > 0$. Ainsi, f_n est strictement croissante.
3. On peut s'aider du dessin et montrer que le point A de coordonnées $(1, 2)$ appartient à toutes les courbes. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $f_n(1) = 1 + \mathrm{e}^{n(1-1)} = 1 + \mathrm{e}^0 = 2$, ce qui signifie que A appartient à $\mathscr{C}_n$.

Éléments de correction - Exercice 77

Quand on demande d'étudier le signe d'une expression, on peut donner la réponse sous la forme d'un tableau de signe.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} 5\mathrm{e}^x - 5 &\geq 0 \\ 5\mathrm{e}^x &\geq 5 \\ \mathrm{e}^x &\geq 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$5\mathrm{e}^x - 5$		$-$	0	$+$	

2. On a

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$(3x-1)\mathrm{e}^x$		$-$	0	$+$	

3. On a

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$-8x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^{x-2}		$+$		$+$		$+$	
$(-8x+4)(3x-1)\mathrm{e}^{x-2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. On a

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$6x-5$		$-$	0	$+$	
e^{3x-1}		$+$		$+$	
$\dfrac{6x-5}{\mathrm{e}^{3x-1}}$		$-$	0	$+$	

12.10 Établir une inégalité

Éléments de correction - Exercice 78

Dans cet exercice, x est un réel de l'intervalle $[2\,;3]$. *On commence donc chaque question en écrivant* $2 \leq x \leq 3$.

1. On a

$$\begin{aligned} & 2 \leq x \leq 3 && \\ \text{donc } & 7\times 2 \leq 7\times x \leq 7\times 3 && \text{on multiplie par } 2>0 \\ \text{donc } & 14 \leq 7x \leq 21 && \text{on simplifie} \\ \text{donc } & 14+3 \leq 7x+3 \leq 21+3 && \text{on ajoute } 3 \end{aligned}$$

Donc $17 \leq A(x) \leq 24$.

2. On a

$$\begin{aligned} & 2 \leq x \leq 3 & \\ \text{donc } & -2 \geq -x \geq -3 & \text{on multiplie par } -1 \\ \text{donc } & -2+1 \geq -x+1 \geq -3+1 & \text{on ajoute } 1 \end{aligned}$$

On a donc $-2 \leq B(x) \leq -1$.

3. On a

$$\begin{aligned} & 2 \leq x \leq 3 & \\ \text{donc } & 17 \leq 7x \leq 21 & \text{on multiplie par } 7 > 0 \\ \text{donc } & 14 \leq 7x - 3 \leq 18 & \text{on ajoute } -3 \\ \text{donc } & \frac{1}{14} \geq \frac{1}{7x-3} \geq \frac{1}{18} & \text{on compose par la fonction inverse, décroissante sur } \mathbf{R}_+^\star \end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{18} \leq C(x) \leq \dfrac{1}{14}$.

4. On a

$$\begin{aligned} & 2 \leq x \leq 3 & \\ \text{donc } & \frac{8}{3} \leq x + \frac{2}{3} \leq \frac{11}{3} & \text{on ajoute } \frac{2}{3} \\ \text{donc } & \exp\left(\frac{8}{3}\right) \leq \exp\left(x + \frac{2}{3}\right) \leq \exp\left(\frac{11}{3}\right) & \text{on compose par la fonction exp, croissante} \end{aligned}$$

donc $\exp\left(\dfrac{8}{3}\right) \leq D(x) \leq \exp\left(\dfrac{11}{3}\right)$.

5. On a

$$\begin{aligned} & 2 \leq x \leq 3 & \\ \text{donc } & -2 \geq -x \geq -3 & \text{on multiplie par } -1 < 0 \\ \text{donc } & -1 \geq -x+1 \geq -2 & \text{on ajoute } 1 \\ \text{donc } & (-1)^8 \geq (-x+1)^3 \geq (-2)^3 & \text{on compose par la fonction cube, croissante} \\ \text{donc } & -1 \geq (-x+1)^3 \geq -8 & \\ \text{donc } & 1 \leq -(-x+1)^3 \leq 8 & \text{on multiplie par } -1 < 0 \\ \text{donc } & \ln(1) \leq \ln(-(-x+1)^3) \leq \ln(8) & \text{on compose par la fonction ln, croissante} \end{aligned}$$

Donc, en simplifiant (on utilise $8 = 2^3$ puis $\ln(8) = 3\ln(2)$), on obtient $0 \leq E(x) \leq 3\ln(2)$.

6. On a

$$\begin{aligned} & 2 \leq x \leq 3 & \\ \text{donc } & \sqrt{2} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{3} & \text{on compose racine carrée, croissante} \\ \text{donc } & \sqrt{2} + \sqrt{2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{2} \leq \sqrt{3} + \sqrt{2} & \text{on ajoute } \sqrt{2} \\ \text{donc } & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & \text{on divise par } \sqrt{2} \\ \text{donc } & 2 \leq \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1. & \end{aligned}$$

Ainsi, en composant par la fonction cube, croissante, on obtient $8 \leq F(x) \leq \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1\right)^3$.

Éléments de correction - Exercice 79

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. Soit $x \in [3\,;4]$. On a

$$\begin{array}{rcccccl} & 3 & \leq & x & \leq & 4 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{3} & \geq & \dfrac{1}{x} & \geq & \dfrac{1}{4} & \text{par décroissance de l'inverse sur } \mathbf{R}_+^\star \end{array}$$

(comme la fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante, on a changé le sens des inégalités). On a donc obtenu $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{3}$. Puisque $\dfrac{1}{4} \geq -\dfrac{1}{3}$, on en déduit $-\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{3}$.

Éléments de correction - Exercice 80

1. On a $25 \leq 29 \leq 36$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{25} \leq \sqrt{29} \leq \sqrt{36}$, puis $5 \leq \sqrt{29} \leq 6$.

2. Le discriminant du trinôme est 29, ses racines sont $\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$. On a

$$\begin{aligned} & 5 \leq \sqrt{29} \leq 6 & \\ \text{donc } & -5 \geq -\sqrt{29} \geq -6 & \text{on multiplie par } -1 < 0 \\ \text{donc } & -5+1 \geq 1-\sqrt{29} \geq -6+1 & \text{on ajoute } 1 \\ \text{donc } & -4 \geq 1-\sqrt{29} \geq -5 & \text{on simplifie} \\ \text{donc } & \frac{-4}{2} \geq \frac{1-\sqrt{29}}{2} \geq \frac{-5}{2} & \text{on divise par } 2 > 0 \\ \text{donc } & -2 \geq \frac{1-\sqrt{29}}{2} \geq -\frac{5}{2}. & \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} & 5 \leq \sqrt{29} \leq 6 & \\ \text{donc } & 6 \leq 1+\sqrt{29} \leq 7 & \text{on ajoute } 1 \\ \text{donc } & \frac{6}{2} \leq \frac{1+\sqrt{29}}{2} \leq \frac{7}{2} & \text{on divise par } 2 > 0 \\ \text{donc } & 3 \leq \frac{1+\sqrt{29}}{2} \leq \frac{7}{2}. & \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 81

Soit $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(3+x^2) &= x \\ 3+x^2 &= 5x \\ x^2-5x+3 &= 0 \end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme obtenu vaut 13, ses racines sont $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ et $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$. Il faut encadrer ces solutions pour vérifier si elles appartiennent à $[0\,;1]$ *(l'énoncé assure qu'il n'y en a qu'une dans le bon intervalle, mais on ne sait pas encore laquelle !)*

On a

$$\begin{aligned}
&9 \leq 13 \leq 16 && \\
\text{donc } &\sqrt{9} \leq \sqrt{13} \leq \sqrt{16} && \text{on compose par la racine carrée, croissante} \\
\text{donc } &3 \leq \sqrt{13} \leq 4 && \text{on simplifie} \\
\text{donc } &-3 \geq -\sqrt{13} \geq -4 && \text{on multiplie par } -1 < 0 \\
\text{donc } &5-3 \geq 5-\sqrt{13} \geq 5-4 && \text{on ajoute } 5 \\
\text{donc } &2 \geq 5-\sqrt{13} \geq 1 && \text{on simplifie} \\
\text{donc } &\frac{2}{2} \geq \frac{5-\sqrt{13}}{2} \geq \frac{1}{2} && \text{on multiplie par } \frac{1}{2} > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, donc en particulier $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \in [0\,;\,1]$, ce qui signifie que cette valeur est bien une solution. L'énoncé affirme qu'il n'y en a pas d'autre ; vérifions-le :

$$\begin{aligned}
&3 \leq \sqrt{13} \leq 4 && \\
\text{donc } &8 \leq 5+\sqrt{13} \leq 9 && \text{on ajoute } 5 \\
\text{donc } &4 \leq \frac{5+\sqrt{13}}{2} \leq \frac{9}{2} && \text{on multiplie par } \frac{1}{2} > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \in \left[4\,;\,\dfrac{9}{2}\right]$ et en particulier $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \notin [0\,;\,1]$, ce qui signifie que cette valeur n'est pas solution de l'équation proposée.

Finalement, l'unique solution à l'équation proposée est $\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Éléments de correction - Exercice 82

1. Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si $x-1 \neq 0$ (on n'a pas le droit de diviser par 0), à savoir $x \neq 1$. Ainsi, f est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

(on reconnaît un quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $u : x \longmapsto x^2+1$ et $v : x \longmapsto x-1$, puis on applique la formule de dérivation des quotients).

Le discriminant de x^2-2x-1 est 8 et on obtient ensuite ses racines $\dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $\dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$. Ainsi, puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines, on a :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

On a par simples opérations $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. De plus, pour tout $x \notin \{0,1\}$,

$f(x) = \dfrac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = x\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(1-\sqrt{2}) &= \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{1-2\sqrt{2}+2+1}{-\sqrt{2}} \\ &= \frac{-4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-4+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \\ &= \frac{-4\sqrt{2}+4}{2} \\ &= 2-2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

De même, $f(1+\sqrt{2}) = 2+2\sqrt{2}$. Finalement,

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$2-2\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2+2\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

3. Soit $x \leq -1$. Puisque f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$, $f(x) \leq f(-1)$. Or $f(-1) = -1$, donc $f(x) \leq -1$.

Éléments de correction - Exercice 83

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x+4 \neq 0$, à savoir $x \neq -4$. Donc le domaine de définition de f est $D =]-\infty\,;\,-4[\cup]-4\,;\,+\infty[$.

2. La fonction f est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$, en appliquant la formule usuelle de dérivation d'un quotient,

$$f'(x) = \frac{9}{(x+4)^2}.$$

Or $9 > 0$, $(x+4)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ puis f est strictement croissante sur D. De plus, pour tout $x \in D$,

$$f(x) = \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{4}{x})} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}$$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Par simples opérations, on a aussi $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$. Finalement,

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

3. Soit $x \geq -1$. Puisque f est croissante sur $[-1\,;\,+\infty[$, $f(x) \geq f(-1)$. Or $f(-1) = -1$, donc $f(x) \geq -1$.

Éléments de correction - Exercice 84

1. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x>0$,

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}.$$

Soit $x\in\mathbf{R}_+^\star$. On a

$$\begin{aligned} f'(x)&\geq 0 \\ 1-\frac{1}{x}&\geq 0 \\ 1&\geq\frac{1}{x} && \text{on ajoute } \frac{1}{x} \\ 1&\leq x && \text{on compose par la fonction inverse, décroissante sur } \mathbf{R}_+^\star \end{aligned}$$

Ainsi,

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc f est croissante sur $]0\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. Soit $x\in[1\,;2]$. Puisque f est croissante sur $[1\,;2]$, on a $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$. Or $f(1)=1$ et $f(2)=2-\ln(2)$. Donc $1\leq f(x)\leq 2-\ln(2)$. Puisque $\ln(2)>0$, on a $2-\ln(2)<0$ et donc en particulier $1\leq f(x)\leq 2$.

Éléments de correction - Exercice 85

Soit $k\geq 2$. On étudie le signe de la différence, qu'on factorise :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2}-\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)&=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k} \\ &=\frac{k-1}{k^2(k-1)}-\frac{k^2}{k^2(k-1)}+\frac{k(k-1)}{k^2(k-1)} \\ &=\frac{k-1-k^2+k(k-1)}{k^2(k-1)} \\ &=\frac{k-1-k^2+k^2-k}{k^2(k-1)} \\ &=\frac{-1}{k^2(k-1)}. \end{aligned}$$

Or $-1\leq 0$, $k^2\geq 0$, $k-1\geq 0$ donc, via la règle des signes *(on aurait pu aussi faire un tableau de signes, ce qui revient au même)*, $\frac{1}{k^2}-\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\leq 0$, donc $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Éléments de correction - Exercice 86

1. (a) La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$h'(x)=\mathrm{e}^x-1$$

Soit $x\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h'(x)&\geq 0 \\ \mathrm{e}^x-1&\geq 0 \\ \mathrm{e}^x&\geq 1 \\ x&\geq 0. \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction h est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) Le minimum de la fonction h est donc atteint en 0 (donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq h(0)$) et il vaut $h(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$. Cela signifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq 0$.

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} & h(x) \geq 0 \\ \text{donc } & \mathrm{e}^x - x - 1 \geq 0 \\ \text{donc } & \mathrm{e}^x \geq x + 1 \text{on ajoute } x+1. \end{aligned}$$

2. On introduit la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ dans le but d'étudier son signe. La fonction f est définie et dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > -1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} - 1 \\ &= \frac{1-(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{-x}{x+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, le maximum de f est atteint en 0, ce qui signifie que pour tout $x > -1$, $f(x) \leq f(0)$. Puisque $f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} & f(x) \leq 0 \\ \text{donc } & \ln(1+x) - x \leq 0 \\ \text{donc } & \ln(1+x) \leq x && \text{on ajoute } x. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 87

1. Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si $1-x > 0$ (pour que le terme $\ln(1-x)$ existe), c'est-à-dire $x < 1$. Ainsi, le domaine de définition de f est $]-\infty\,;\,1[$.

2. La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$ et

$$\forall x < 1, \quad f'(x) = -\ln(1-x).$$

(il faut reconnaître un produit pour dériver la fonction $x \longmapsto (1-x)\ln(1-x)$, et utiliser la formule de dérivation d'un produit).

Soit $x < 1$. On a

$$\begin{array}{rcl} -\ln(1-x) & \geq & 0 \\ \ln(1-x) & \leq & 0 \\ 1-x & \leq & \mathrm{e}^0 \\ 1-x & \leq & 1 \\ -x & \leq & 0 \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

Finalement, on obtient :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(on verra comment déterminer les limites cette année).

3. La question précédente assure que le minimum de f est 0, donc pour tout $x < 1$, $f(x) \geq 0$.

4. Il faut utiliser la question précédente. Soit $x < 1$. On a

$$\begin{array}{lll} & (1-x)\ln(1-x) + x \geq 0 & \\ \text{donc} & (1-x)\ln(1-x) \geq -x & \\ \text{donc} & \ln(1-x) \geq \dfrac{-x}{1-x} & \text{car } 1-x > 0 \\ \text{donc} & 1-x \geq \exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right) & \end{array}$$

Éléments de correction - Exercice 88

1. (a) On a $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3\ln(1) = 1 - 1 + 0 = 0$.

(b) La fonction φ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{3}{x} = \frac{2x^2+3}{x}.$$

Pour tout $x > 0$, $2x^2 > 0$, $3 > 0$ donc $2x + 3 > 0$, et $x > 0$, donc $\varphi'(x) > 0$. Ainsi, φ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

En particulier, pour tout $x < 1$, $\varphi(x) < \varphi(1)$ puis $\varphi(x) < 0$. De même, pour tout $x > 1$, $\varphi(x) > \varphi(1)$ puis $\varphi(x) > 0$. En résumé,

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	

2. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u : x \longmapsto x^2 - 2x - 2 - 3\ln(x)$ et $v : x \longmapsto x$. Les fonctions u et v sont dérivables et $u' : x \longmapsto 2x - 2 - \dfrac{3}{x}$ et $v' : x \longmapsto 1$. Ainsi, avec la formule de dérivation d'un quotient, on obtient que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(2x - 2 - \frac{3}{x})x - (x^2 - 2x - 2 - 3\ln(x))}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 3 - x^2 + 2x + 2 + 3\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 3\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{\varphi(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

3. On connaît la signe de φ avec la question **1.**, d'où :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Éléments de correction - Exercice 89

Ici on étudie une méthode très classique. On veut étudier les variations de f_n, mais le problème est que le signe de la dérivée f_n' n'est pas aisé à obtenir. On cherche donc ce signe à l'aide d'une étude des variations de f_n', qu'on obtient en dérivant à nouveau f_n'.

1. f_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations sur des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f_n'(x) = n - \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$
Pour obtenir les variations de f_n', il faut dériver cette fonction (on notera f_n'' la dérivée de f_n'). On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f_n''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x+1)^3}.$$
Or $\mathrm{e}^x > 0$, $(1+\mathrm{e}^x)^3 > 0$ et
$$\mathrm{e}^x - 1 \geq 0 \text{ si et seulement si } x \geq 0$$
De plus, $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f_n'(x) = n - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}(1+2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})} = n - \frac{1}{\mathrm{e}^x(1+2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})} = n - \frac{1}{\mathrm{e}^x+2+\mathrm{e}^{-x}},$$
d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n'(x) = n$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n'(x) = n$. En résumé, on a obtenu :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
f_n'	n	$\searrow$	$n-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	n

2. La fonction précédente assure que f_n' est minorée par $n - \dfrac{1}{4}$ et, puisque $n \in \mathbf{N}^\star$, $n - \dfrac{1}{4} > 0$. Donc f_n est une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Éléments de correction - Exercice 90

1. 2 est racine évidente de x^2-5x+6, et les coefficients racines assure que le produit de 2 avec l'autre racine est égal à 6, donc 3 est l'autre racine. Ainsi, le domaine de définition de h est $D = \mathbf{R} \setminus \{2,3\}$.
Si on n'a pas repéré de racine évidente, on peut aussi obtenir les racines avec les formules liées au discriminant !
2. Le signe de x^2-5x+6 est celui de son coefficient dominant (ici $1>0$), sauf entre ses racines, donc

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

De plus $x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geq 0$, donc
$$\lim_{x\to2^-} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to2^+} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to3^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to3^+} h(x) = +\infty.$$
Enfin, pour tout $x \notin \{0,2,3\}$,
$$h(x) = \frac{x^2(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})} = \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$$
donc
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$$

Enfin, la fonction h est dérivable sur D et on a,

$$\forall x \in D, \quad h'(x) = \frac{-3x^2 + 10x - 7}{(x^2 - 5x + 6)^2}.$$

Or 1 est racine évident de $-3x^2 + 10x - 7$ et les relations coefficients racines assure que le produit de 1 avec l'autre racine doit être égal à $\frac{-7}{-3}$, ce qui entraîne que l'autre racine est $\frac{7}{3}$. Finalement, puisque le signe d'un trinôme est le même que celui de son coefficient dominant (ici $-3 < 0$) sauf entre ses racines, on obtient :

x	$-\infty$		1		2		$\frac{7}{3}$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
h	1	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

12.11 Exercices d'entraînement supplémentaires

Éléments de correction - Exercice 91

1. $A = \dfrac{2}{\frac{2}{3} + 2} = \dfrac{2}{\frac{2}{3} + \frac{6}{3}} = \dfrac{2}{\frac{8}{3}} = \dfrac{2 \times 3}{8} = \dfrac{3}{4}$.
2. $B = \dfrac{a + \frac{1}{a}}{a} = \dfrac{\frac{a^2}{a} + \frac{1}{a}}{a} = \dfrac{\frac{a^2+1}{a}}{a} = \dfrac{a^2 + 1}{a^2} = 1 + \dfrac{1}{a^2}$.
3. $C = \dfrac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = \dfrac{1}{\frac{5}{6}} = \dfrac{6}{5}$.
4. $D = \dfrac{1}{a(a+b)} + \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a^2(a+b)} + \dfrac{a+b}{a^2(a+b)} - \dfrac{a(a+b)}{a^2(a+b)} = \dfrac{a + a + b - a(a+b)}{a^2(a+b)} = \dfrac{2a + b - a^2 - ab}{a^2(a+b)}$.

Éléments de correction - Exercice 92

1. Comme $4 = 2 \times 2$, un dénominateur commun des trois fractions qui sont les termes de A est 4×3, soit 12. On note alors que
$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}.$$
2. Comme $3 \times 8 = 24$ et $2 \times 8 = 16$, un multiple commun de 16 et 24 est $3 \times 2 \times 8$, soit 48. On peut donc écrire
$$B = \frac{1}{24} - \frac{1}{16} = \frac{2}{48} - \frac{3}{48} = -\frac{1}{48}.$$
3. Il faut effectuer les simplifications au fur et à mesure du calcul :
$$C = \frac{\frac{7+5}{3 \times 5}}{\frac{3 \times 5 + 4 \times 12}{4 \times 5}} = \frac{7+5}{3 \times 5} \times \frac{4 \times 5}{3 \times 4 + 4 \times 12} = \frac{7+5}{3} \times \frac{4}{3 \times 5 + 4 \times 12} = \frac{12}{3} \times \frac{4}{15 + 48} = 4 \times \frac{4}{63} = \frac{16}{63}.$$
4. On a
$$D = \frac{\frac{3}{4} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{12}}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{2 \times 3 - 4}{3}} = \frac{\frac{3 \times 8 + 3}{8 \times 4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \times 8 + 3}{8 \times 4} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{64}.$$

Éléments de correction - Exercice 93

1. $A = \dfrac{32}{40} = \dfrac{8\times 4}{8\times 5} = \dfrac{4}{5}$.

2. $B = 8^3 \times \dfrac{1}{4^2} = (2\times 4)^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3\times 4^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$.

3. $C = \dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1}\times (2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{3^4}{3^3} = 3$.

4. $D = \dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}} = \dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3} = \dfrac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2} = -2\times 3^{3k-2}$.

Éléments de correction - Exercice 94

1.
$$\begin{aligned} A &= \frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}\\ &= 3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5 = 105+70+42+30 = 247.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}\\ &= \left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8} = \frac{145}{15}\times\frac{7}{8} = \frac{29}{3}\times\frac{7}{8} = \frac{203}{24}.\end{aligned}$$

3.
$$C = \frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3} = \frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)} = \frac{5\times(-6)}{9} = -\frac{10}{3}.$$

4.
$$\begin{aligned} D &= \frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}\\ &= \frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2} = \frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2} = 1\,000.\end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 95

On a

$$A = \frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}} = \frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5}-\frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

Éléments de correction - Exercice 96

1. On reconnaît l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, valable pour tous a et b réels. Ainsi,

$$A = \frac{2\,022}{2\,022^2+(1-2\,022)(1+2\,022)} = 2\,0222\,022^2+1-2\,022^2 = 2\,022.$$

2. On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}\\ &= \frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1-2} = \frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. En posant $a = 1\,234$, on a $1\,235 = a+1$ et $2\,469 = 2a+1$. Donc,

$$C = \frac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1} = \frac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1.$$

4. En posant $a = 1\,000$, on a $999 = a-1$, $1\,001 = a+1$, $1\,002 = a+2$ et $4\,002 = 2a+2$. Donc,

$$D = \frac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)} = \frac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)} = \frac{2(2a+1)}{2a+1} = 2.$$

Éléments de correction - Exercice 97

1. $$\begin{aligned} A &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

2. $$B = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab+a^2+b^2}{a-b} - \frac{a^2+2ab+b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

3. $$C = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

Éléments de correction - Exercice 98

1. $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}.$

2. $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}.$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}.$

4. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}.$

Éléments de correction - Exercice 99

Avec la formule donnée, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$A_n = \frac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}.$$

Éléments de correction - Exercice 100

Cet exercice nécessite de savoir résoudre des équations du premier degré. Cela est étudié en détail dans une leçon ultérieure.

Notons x la contenant (en L) de la barrique. Après les trois ventes, la quantité restante est

$$x - \frac{x}{3} - \frac{2x}{9} - \frac{x}{5} = \frac{45x - 15x - 10x - 9x}{45} = \frac{11x}{45}.$$

La valeur totale de cette quantité restante est 66 €, pour un prix de vente au litre égal à 1,5 €, donc $\dfrac{11}{45}x \times 1,5 = 66$. Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned} \frac{11}{45}x \times \frac{3}{2} &= 66 \\ x &= \frac{2}{3} \times \frac{45}{11} \times 66 \\ x &= \frac{2 \times 15 \times 3 \times 3 \times 2 \times 11}{11 \times 3} \end{aligned}$$

Finalement, la contenant de la barrique est $x = 180\,\mathrm{L}$.

Éléments de correction - Exercice 101

Cet exercice nécessite de savoir résoudre des équations du premier degré. Cela est étudié en détail dans une leçon ultérieure.
Soit x la valeur de l'héritage.

$$\begin{aligned} 32\ 000 &= \left(1 - \frac{3}{10}\right) x \\ 32\ 000 &= \frac{8}{11} x \\ x &= \frac{32\ 000 \times 11}{8} \\ x &= 44\ 000. \end{aligned}$$

Le premier a reçu $\frac{3}{11}x = \frac{3}{11} \times 44\ 000 = 12\ 000$ €.
Soit p_2 la part du deuxième héritier et p_3 la part du troisième héritier. Alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_2 + p_3 &=& 32\ 000 \\ \frac{2}{7}p_2 &=& \frac{4}{9}p_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_2 + p_3 &=& 32\ 000 \\ 9p_2 &=& 14p_3 \end{array}\right. \qquad \text{on multiplie la deuxième ligne par } \frac{7 \times 9}{2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_2 &=& 32\ 000 - p_3 \\ 9 \times (32\ 000 - p_3) &=& 14p_3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \text{on substitue la valeur de } p_2 \text{ obtenue} \\ \text{à la première ligne dans la deuxième} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_2 &=& 32\ 000 - p_3 \\ 23p_3 &=& 288\ 000 \end{array}\right.$$

Donc $p_3 = \frac{288\ 000}{23}$ et $p_2 = 32\ 000 - \frac{288\ 000}{23}$.

Éléments de correction - Exercice 102

Cet exercice nécessite de savoir résoudre des équations du premier degré. Cela est étudié en détail dans une leçon ultérieure.
Par jour, la pendule avance de $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ minute. Soit x le nombre de jours pour qu'elle avance de deux minutes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}x &= 2 \\ x &= 24 && \text{on multiplie par 12} \end{aligned}$$

Finalement, il faut 24 jours pour que la pendule avance de 2 min.

Éléments de correction - Exercice 103

1. On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 :

$$\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$$

2. Avec les facteurs premiers 5 et 11 :

$$\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \frac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \frac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11.$$

3. On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 :

$$\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}.$$

4. Même méthode que précédemment :

$$\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5.$$

Éléments de correction - Exercice 104

1. $A = \dfrac{a^2 \times b^2 \times b}{a^{3-n}} = a^{n-1}b^3$.
2. $B = \dfrac{3a^3 + 6a^2b^2}{4a^2b} = \dfrac{2a^2(a+3b^2)}{4a^2b} = \dfrac{a+3b^2}{2b}$. *Notons que la question est peu précise ici : que signifie « simple » ? La forme* $B = \dfrac{a}{2b} + \dfrac{3b}{2}$ *est simple également et répond aussi à la question !*

Éléments de correction - Exercice 105

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x+3)^3 = 2^3 \times \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^3 = 8\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^3$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(2x+3)^3 = 3^3 \times \left(1 + \dfrac{2x}{3}\right)^3 = 27\left(1 + \dfrac{2x}{3}\right)^3$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}^\star$, $(2x+3)^4 = x^4 \times \left(2 + \dfrac{3}{x}\right)^4$.

Éléments de correction - Exercice 106

1. On a

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6(2\sqrt{9-5} = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $3+\sqrt{5} \geq 3-\sqrt{5}$, donc par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{3+\sqrt{5}} \geq \sqrt{3-\sqrt{5}}$, d'où $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \geq 0$. Ainsi, le calcul précédent permet de conclure :

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

2. On a

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1+\sqrt{2})^2.$$

Puisque $1 + \sqrt{2} \geq 0$, on en déduit que $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

Éléments de correction - Exercice 107

On a

$$A = \frac{1}{1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+(\sqrt{2}+\sqrt{3}))(1-(\sqrt{2}+\sqrt{3}))} = \frac{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)(4-2\sqrt{6})}{(4+2\sqrt{6})(4-2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8}.$$

Finalement,

$$A = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Éléments de correction - Exercice 108

1. On utilise la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \frac{6-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5}{2^2-\sqrt{5}^2} = \frac{11-5\sqrt{5}}{-1} = 5\sqrt{5}-11.$$

2. On élève au carré :

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}^2 = 3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2,$$

donc, comme $3+2\sqrt{2}\geq 0$,

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

3. On élève au carré et on utilise la quantité conjuguée du dénominateur obtenu :

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2^2+4\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{2^2-\sqrt{2}^2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}.$$

Puisque $3+2\sqrt{2}\geq 0$, on en déduit, avec la question précédente,

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

4. $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3} = \dfrac{3}{e^{\frac{1}{2}\ln 3}} = \dfrac{3}{e^{\ln(\sqrt{3})}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \sqrt{3}.$

5. $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{4(3+\sqrt{5})}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}.$

6. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^2-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)\end{aligned}.$$

Avec la question **2.**, on en déduit

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Éléments de correction - Exercice 109

1. $f(x)+\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}.$

2. $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)} = x-\sqrt{x^2-1}.$

3. On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = 1+\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

4. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, d'où $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}.$

5. On a $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$, donc

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1}-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{(x-1)^2-1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

6. $\dfrac{f(x)}{f''(x)} = -4(x-1)^2$.

Éléments de correction - Exercice 110

1. On peut développer l'expression $n(n+3)+2$ pour obtenir une expression du second degré que l'on factorise en utilisant les formules classiques : $n(n+3)+2 = (n+1)(n+2)$.
2. On note que $p = (n+1)(n+2)\times n(n+3) = q(q-2)$ d'après la relation de la question précédente.
3. On note que $p+1 = q(q-2)+1 = q^2-2q+1 = (q-1)^2$. Finalement $p+1$ est un carré parfait.

Éléments de correction - Exercice 111

Soit a, b et c trois entiers relatifs. On a

$$\begin{array}{rll}
 & (c(a^2-b^2))^2 + (2abc)^2 - (c(a^2+b^2))^2 & \\
= & c^2(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2c^2 - c^2(a^2+b^2)^2 & \\
= & c^2\left((a^2-b^2)^2 - (a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2\right) & \text{mise en facteur de } c^2 \\
= & c^2\left(\left((a^2-b^2)-(a^2+b^2)\right)\left((a^2-b^2)+(a^2+b^2)\right) + 4a^2b^2\right) & \text{utilisation d'une identité remarquable} \\
= & c^2\left((-2b^2)\times(2a^2) + 4a^2b^2\right) & \text{simplification} \\
= & 0 &
\end{array}$$

Éléments de correction - Exercice 112

1. En exploitant successivement la troisième, puis la première et la deuxième, puis à nouveau la troisième identité remarquable, on note que

$$\begin{array}{rcl}
4d^2-(d^2-r^2+1)^2 & = & (2d-d^2+r^2-1)(2d+d^2-r^2+1) \\
 & = & (r^2-(d-1)^2)((d+1)^2-r^2) \\
 & = & (r-1+d)(r+1-d)(d+1-r)(d+1+r)
\end{array}$$

2. Comme $d>0$ et $r>1$, $d+r-1>0$. Il est de plus évident que $d+r+1>0$. Finalement le réel manipulé est positif si et seulement si $(1+r-d)(1-r+d)\geq 0$ si et seulement si $r-1\leq d\leq r+1$ ou $r+1\leq d\leq r-1$. Le deuxième cas étant impossible, les deux cercles considérés ont un point commun si et seulement si $r-1\leq d\leq r+1$.

Éléments de correction - Exercice 113

1. La première expression est un carré parfait que l'on repère en notant que $x^4 = (x^2)^2$. En effet $A_1 = (x^2+9)^2$.
2. On peut factoriser A_2 en utilisant directement la troisième identité remarquable $A_2 = ((2x-3)-(x+7))((2x-3)+(x+7))$ donc $A_2 = (x-10)(3x+4)$.
3. La deuxième identité remarquable permet de repérer un carré parfait en regroupant les deux premiers et le dernier termes de A_3, ce qui permet d'achever la factorisation. Ainsi

$$\begin{array}{rcl}
A_3 & = & (x^2-2x+1)-(x-1)(2x+3) \\
 & = & (x-1)^2-(x-1)(2x+3) \\
 & = & (x-1)((x-1)-(2x+3)) \\
 & = & -(x-1)(x+4).
\end{array}$$

4. Dans chaque terme de A_4, on voit apparaître les facteurs $2x+5$ et $x+2$, ces facteur apparaissant parfois en utilisant la troisième identité remarquable. On calcule ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
A_4 & = & (2x-5)(2x+5)(x+2)-(x-2)(x+2)(2x+5)+5(x+2)(2x+5) \\
 & = & (2x+5)(x+2)((2x-5)-(x-2)+5) \\
 & = & (2x+5)(x+2)^2.
\end{array}$$

Éléments de correction - Exercice 114

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 115

1. On a $n(n+3)+2 = n^2+3n+2$. Le discriminant de ce trinôme est 1 et ses racines sont -1 et -2, donc $n(n+3)+2 = (n+1)(n+2)$.
2. On note que $p = (n+1)(n+2) \times n(n+3) = q(q-2)$ d'après la relation de la question précédente.
3. On note que $p+1 = q(q-2)+1 = q^2-2q+1 = (q-1)^2$. Ainsi, $p+1$ est un carré parfait.

Éléments de correction - Exercice 116

Pas de corrigé

Éléments de correction - Exercice 117

1. On divise l'équation proposée par x^2 (on peut car $x \neq 0$, donc $x^2 \neq 0$) :
$$x^4+8x^3+2x^2+8x+1 = 0 \text{ si et seulement si } x^2+8x+2+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2} = 0.$$
2. On a $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} = x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$.
3. Soit $x \neq 0$. On a $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2 = u^2$ et $8x+\dfrac{8}{x} = 8u$, d'où
$$\begin{aligned} x^4+8x^3+2x^2+8x+1 &= 0 \\ u^2+8u &= 0 \\ u(u+8) &= 0 \\ u = 0 &\text{ ou } u = -8 \\ x+\frac{1}{x} = 0 &\text{ ou } x+\frac{1}{x} = -8. \end{aligned}$$
Or,
$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x} &= 0 \\ \frac{x^2+1}{x} &= 0 \\ x^2+1 &= 0 \end{aligned}$$
et cette équation n'admet pas de solution réelle. De plus,
$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x} &= -8 \\ \frac{x^2+1}{x} &= -8 \\ x^2+1 &= -8x \\ x^2+8x+1 &= 0. \end{aligned}$$
On calcule le discriminant de ce trinôme puis on obtient que ses racines sont $-4-\sqrt{15}$ et $-4+\sqrt{15}$.
Finalement, puisque 0 n'est pas solution de l'équation, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-4-\sqrt{15}, -4+\sqrt{15}\right\}$.

Éléments de correction - Exercice 118

1. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
2. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.

3. L'assertion est fausse : $\ln x$ existe si et seulement si $x > 0$.
4. L'assertion est vraie.
5. L'assertion est vraie.
6. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}_+^\star$, $b\ln(a) = \ln\left(a^b\right)$.
7. L'assertion est fausse. On a plutôt, pour tous $a, b \in \mathbf{R}_+^\star$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Éléments de correction - Exercice 119

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par e^{-x}.

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^0} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

   puisque $\mathrm{e}^0 = 1$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\mathrm{e}^x - 1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} &= \frac{\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)}\mathrm{e}^x + 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x)^2 - 1} && \text{on utilise une identité remarquable au dénominateur} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}.\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{2x})^2 &= (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{4x} \\ &= (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{3x} \\ &= (\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^0)\mathrm{e}^{3x} && \text{on développe } (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^x \\ &= (\mathrm{e}^{2x} + 1)\mathrm{e}^{3x}.\end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 120

Pour cet exercice, il faut se rappeler du cours sur les suites géométriques.

Diminuer de 5 % revient à multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$. Donc si on note u_n la valeur sur le compte au bout de n mois (pour $n \in \mathbf{N}$), on a donc $u_0 = 1\ 000$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 0,95 \times 1\ 000$. D'après le cours sur les suites géométriques, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1\ 000 \times 0,95^n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}u_n &\leq 500 \\ 1\ 000 \times 0,95^n &\leq 500 \\ 0,95^n &\leq \frac{500}{1000} \\ 0,95^n &\leq \frac{1}{2} \\ \ln(0,95^n) &\leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ n\ln(0,95) &\leq -\ln(2) \\ n &\geq \frac{-\ln(2)}{0,95} && \text{on divise par } \ln(0,95) < 0\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre de mois cherché est le premier entier supérieur à $\frac{-\ln(2)}{0,95}$.

Éléments de correction - Exercice 121

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f(x)^2 - g(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \\ &= e^x e^{-x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. *Ici, il y a essentiellement deux approches :*

- *on peut développer $2f(x)^2 - 1$ et obtenir $f(2x)$;*
- *on peut transformer $f(2x) - 1$ pour obtenir $2f(x)^2$.*

La première approche nécessite de développer une expression, tandis que l'autre approche demande plutôt une factorisation. Factoriser étant plus difficile que développer, on privilégie l'approche n°1 !

$$\begin{aligned} 2f(x)^2 - 1 &= 2 \times \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{2} - 1 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - 2}{2} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \\ &= f(2x). \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 2f(x)g(x) &= 2 \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} \\ &= \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= g(2x). \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 122

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

On rappelle qu'une fonction définie sur un intervalle centré en 0 *vérifiant cette propriété est dite impaire. La fonction h est donc impaire.*

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, où $u : x \longmapsto e^x - e^{-x}$ et $v : x \longmapsto e^x + e^{-x}$ sont des fonctions dérivables, avec $u' : x \longmapsto e^x + e^{-x}$ et $v' : x \longmapsto e^x - e^{-x}$. Ainsi, en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, h est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} - \frac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= 1 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\ &= 1 - h(x)^2. \end{aligned}$$

Éléments de correction - Exercice 123

1. Le discriminant de $2x^2+x+1$ est strictement positif, donc ce trinôme ne s'annule pas. Il s'ensuit que $D = \mathbf{R}$.

2. Soit $x \neq 0$. On a

$$f(x) = \frac{x^2(3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^2(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$. Ainsi, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{3}{2}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{7x^2 + 14x}{(2x^2+x+1)^2} = \frac{7x(x+2)}{(2x^2+x+1)^2}.$$

Ainsi, comme $f(-2) = 2$ et $f(0) = -2$,

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$7x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

4. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ en tant que quotient de fonctions polynomiales (donc continues) dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-2]$, donc d'après le théorème de la bijection, f établit une bijection de $]-\infty\,;\,-2]$ vers $f\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,;\, f(-2)\right] = \left]\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$. Comme $\dfrac{7}{4} \in \left]\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$, on en déduit que l'équation $f(x) = \dfrac{7}{4}$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;\,-2]$.

De même, f établit une bijection de $]-2\,;\,0[$ dans $]-2\,;\,2[$. Comme $\dfrac{7}{4} \in\,]-2\,;\,2[$, $f(x) = \dfrac{7}{4}$ admet une unique solution dans $]-2\,;\,0[$.

De la même façon, on a aussi que f établit une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ dans $\left[-2\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$. Comme $\dfrac{7}{4} \notin \left[-2\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$, $f(x) = \dfrac{7}{4}$ n'admet pas de solution dans $[0\,;\,+\infty[$ *(ici le résultat est négatif, mais il est indispensable de l'écrire car il faut compter les antécédents de $\frac{3}{4}$ dans tous les intervalles où f est strictement monotone afin de prendre en compte tous les réels à la fin).*

Finalement, $f(x) = \dfrac{3}{4}$ admet exactement deux solutions sur $\mathbf{R}$.

Éléments de correction - Exercice 124

1. f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et on a

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{-25x^2 - 15x - 1}{2\sqrt{x}}.$$

2. **(a)** On a $4 < 5 < 9$, donc $2 < \sqrt{5} < 3$ par stricte croissance de la fonction racine carrée, puis $-1 < -3 + \sqrt{5} < 0$. De plus, $-3 + (-\sqrt{5}) < 0$ en tant que somme de deux nombres strictement négatifs.

(b) Soit $x > 0$. Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-25x^2 - 15x - 1$. Or le discriminant de ce trinôme vaut 125 et ses racines sont $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{10}$, $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{10}$ *(on rappelle que* $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = 5\sqrt{5}$*)*. Ainsi, comme le signe du trinôme est négatif (signe de son coefficient dominant) sauf entre ses racines, et que ses racines sont toutes deux négatives,

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
f	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Éléments de correction - Exercice 125

1. On a

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^5+1		$-$	‖	$+$	

donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. De plus, par simples opérations, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Par ailleurs, la fonction est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et,

$$\forall x \neq -1, \quad f'(x) = \frac{-5x^4}{(x^5+1)^2}.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-5x^4$		$-$	$\vdots$	$-$	
$(x^5+1)^2$		$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

2. On a $5 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) - 2 < 0$ et

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	‖	$+$	

donc $\lim\limits_{x\to-1/3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1/3^+} f(x) = -\infty$. De plus, pour tout $x \notin \left\{0, -\dfrac{1}{3}\right\}$,

$$g(x) = \frac{x(5-\frac{2}{x})}{x(3+\frac{1}{x})} = \frac{5-\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}}$$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \dfrac{5}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{5}{3}$.
Par ailleurs, la fonction est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ et,

$$\forall x \neq -\frac{1}{3}, \quad g'(x) = \frac{11}{(3x+1)^2}.$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
g	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$

3. On a $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 > 0$ et :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	‖	$+$	

donc $\lim\limits_{x\to-1/2^-} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1/2^+} h(x) = +\infty$. De plus, pour tout $x \notin \left\{0, -\dfrac{1}{2}\right\}$,

$$h(x) = \frac{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{x(2 + \frac{1}{x})} = \frac{x(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})}{2 + \frac{1}{x}}$$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
Par ailleurs, la fonction h est dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ et,

$$\forall x \neq -\frac{1}{2}, \quad f'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 5}{(2x+1)^2}.$$

Après calcul du discriminant, on obtient que les racines de $2x^2 + 2x - 5$ sont $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{11}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{11}}{2}$. Or, le signe d'un trinôme est celui de son coefficient dominant (ici $2 > 0$), sauf entre ses racines. Donc,

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{1}{2}$		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$h(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$h(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Éléments de correction - Exercice 126

Pour la dernière question de cette exercice, il faut se rappeler du théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes) et du calcul de limites.

1. Introduisons $h : x \longmapsto \ln(x) - (x-1)$. La fonction h est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Ainsi, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &\geq 0 \\ \frac{1}{x} - 1 &\geq 0 \\ \frac{1}{x} &\geq 1 \\ x &\leq 1 \qquad \text{on compose par la fonction inverse, décroissante sur } \mathbf{R}_+^\star \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $h(1) = \ln(1) - (1-1) = 0$,

x	0		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Le maximum de la fonction h étant 0, on en déduit que pour tout $x > 0$, $h(x) \leq 0$, ce qui signifie que $\ln(x) \leq x - 1$.

2. En particulier, pour tout $x > 0$

$$\ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1$$
$$\text{donc } \frac{1}{2}\ln(x) \leq \sqrt{x} - 1.$$

*Puisque l'inégalité de la question **1.** est vraie pour tout nombre strictement positif x, on peut « remplacer » x par $\sqrt{x}$, qui est encore un nombre strictement positif.*

3. Soit $x > 1$. Par stricte croissance de la fonction ln on obtient $\ln(x) > \ln(1)$, puis $\ln(x) > 0$ et donc $\frac{1}{2}\ln(x) > 0$. En utilisant aussi la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\ln(x)}{2} &\leq \sqrt{x} - 1 \\ \text{donc } 0 < \ln(x) &\leq 2(\sqrt{x} - 1) \qquad \text{on multiplie par } 2 \geq 0 \\ \text{donc } 0 < \frac{\ln(x)}{x} &\leq \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} \qquad \text{on divise par } x > 0. \end{aligned}$$

4. Soit $x > 1$. On a

$$\frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} = 2\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x} = 2\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x} = 0$. En utilisant aussi la question précédente, on peut appliquer le théorème d'encadrement, qui assure que $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Éléments de correction - Exercice 127

1. Introduisons la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + x) - x$, qu'on étudie sur $[0\,;+\infty[$. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1.$$

Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ \frac{1}{1+x} - 1 &\geq 0 \\ \frac{1}{1+x} &\geq 1 \qquad \text{on ajoute 1} \\ 1 + x &\leq \frac{1}{1} \qquad \text{on compose par la fonction inverse, décroissante sur } \mathbf{R}_+^\star \\ x &\leq 0 \qquad \text{on ajoute } -1 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$,

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$0 \searrow$	

On a obtenu que le maximum de f sur $[0\,;+\infty[$ est 0, ce qui entraîne que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 0$. En particulier, pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) - x \leq 0$.

2. On considère $g : x \longmapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$, sur $[0\,;+\infty[$. La fonction g est dérivable et, pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x} \\ &= \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{1+x} \end{aligned}$$

Donc, puisque $g(0) = \ln(1+0) - 0 - \dfrac{0^2}{2} = 0$,

x	0	$+\infty$
x^2	$+$	
$x+1$	$+$	
$g'(x)$	$+$	
g	$0 \nearrow$	

On a obtenu que le minimum de g sur $[0\,;+\infty[$ est 0, ce qui entraîne que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$. En particulier, pour tout $x > 0$, $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$.

3. Soit $x > 0$. En ajoutant x à l'inégalité de la question **1.**, on obtient $\ln(1+x) \leq x$. En ajoutant $x - \dfrac{x^2}{2}$ à l'inégalité ed la question **2.**, on obtient $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

4. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x - \frac{x^2}{2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x = 0$, donc les inégalités de la question précédente et le théorème d'encadrement assurent que $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ admet une limite en 0^+ et que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.

Éléments de correction - Exercice 128

On introduit $f : x \longmapsto (1+x)^3 - 1 - 3x$. En développant, on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^2 + x^3$. La fonction f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = 6x + 3x^2 = 3x(2+x).$$

Donc, puisque $f(0) = 0$ et $f(-3) = 0$, on a :

x	$-\infty$	-3	-2		0		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a obtenu que le minimum de f sur $[-3\,;\,+\infty[$ est 0, ce qui entraîne que pour tout $x \geq -3$, $f(x) \geq 0$, puis $(1+x)^3 \geq 1+3x$.

Autre solution. On a $f(x) = 3x^2 + x^3$. Or, si $x \geq -3$, alors par croissance la fonction cube, $x^3 \geq -27$. De plus, $x^2 \geq 9$, donc $3x^2 \geq 27$. En ajoutant les deux inégalités obtenues, on a $x^3 + 3x^2 \geq -27 + 27$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$, puis $(1+x)^3 \geq 1+3x$.

Éléments de correction - Exercice 129

1. Comme $1 \leq x \leq 3$. On a $2\times 1+1 \leq 2x+1 \leq 2\times 3+1$, donc $3 \leq 2x+1 \leq 7$. Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $[3\,;\,7]$, on en déduit
$$\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}.$$
On peut multiplier ces inégalités par $4x+1 > 0$:
$$\frac{4x+1}{7} \leq \frac{4x+1}{2x+1} \leq \frac{4x+1}{3}$$
puis, en utilisant $5 \leq 4x+1 \leq 13$,
$$\frac{5}{7} \leq A \leq \frac{13}{3}.$$
Attention : on ne divise pas des inégalités (même si elles sont strictement positives) ! En règle général, on obtient un encadrement faux !

2. On a
$$A = \frac{2(2x+1)-1}{2x+1} = 2 - \frac{1}{2x+1}.$$
On a montré que $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3}$, donc $-\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{2x+1} \leq -\frac{1}{7}$, puis $\frac{5}{3} \leq A \leq \frac{13}{7}$.

Éléments de correction - Exercice 130

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} > 0$. Or
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - 1 &\geq 0 \\ \mathrm{e}^x &\geq 1 \\ x &\geq \ln(1) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$
et de même, $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff x = 0$. Ainsi,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{e}^x - 1$	$-$	0	$+$
x	$-$	$\Vert$	$+$
$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$	$+$	$\Vert$	$+$

Ainsi, $f(x)$ si et seulement si $x \neq 0$. Donc f est définie sur $\mathbf{R}^\star$.

2. h est dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que somme de produits de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$. De plus, $h'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$. On en déduit, puisque $h(0) = (0-1)\mathrm{e}^0 + 1 = 0$,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a obtenu que 0 est le minimum de h. En particulier, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ en tant que composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x + 1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} = \frac{h(x)}{x(\mathrm{e}^x - 1)}.$$

Avec la question précédente, on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	
x		$-$	$\Vert$	$+$	
$\mathrm{e}^x - 1$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
f		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

4. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{-x}\right) \\
&= \ln(\mathrm{e}^{-x} - 1) - \ln(-x) \\
&= \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x} - 1\right) - \ln(-x) \\
&= \ln(\left(\frac{1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right) - \ln(-x) \\
&= \ln(1 - \mathrm{e}^x) - \ln(-x) - \ln(\mathrm{e}^x) \\
&= \ln\left(\frac{1 - \mathrm{e}^x}{-x}\right) - x \\
&= f(x) - x.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq 0 \\
\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} &\geq 1 \\
\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x} &\geq 0 \\
\frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^x - x - 1 \geq 0$ d'après l'indication, donc $f(x)$ est du signe de x. Ainsi, $f(x) - x$ est du signe de $-x$, donc $f(x) - x \geq 0$ si et seulement si $x \leq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - x$		$-$	0	$+$	