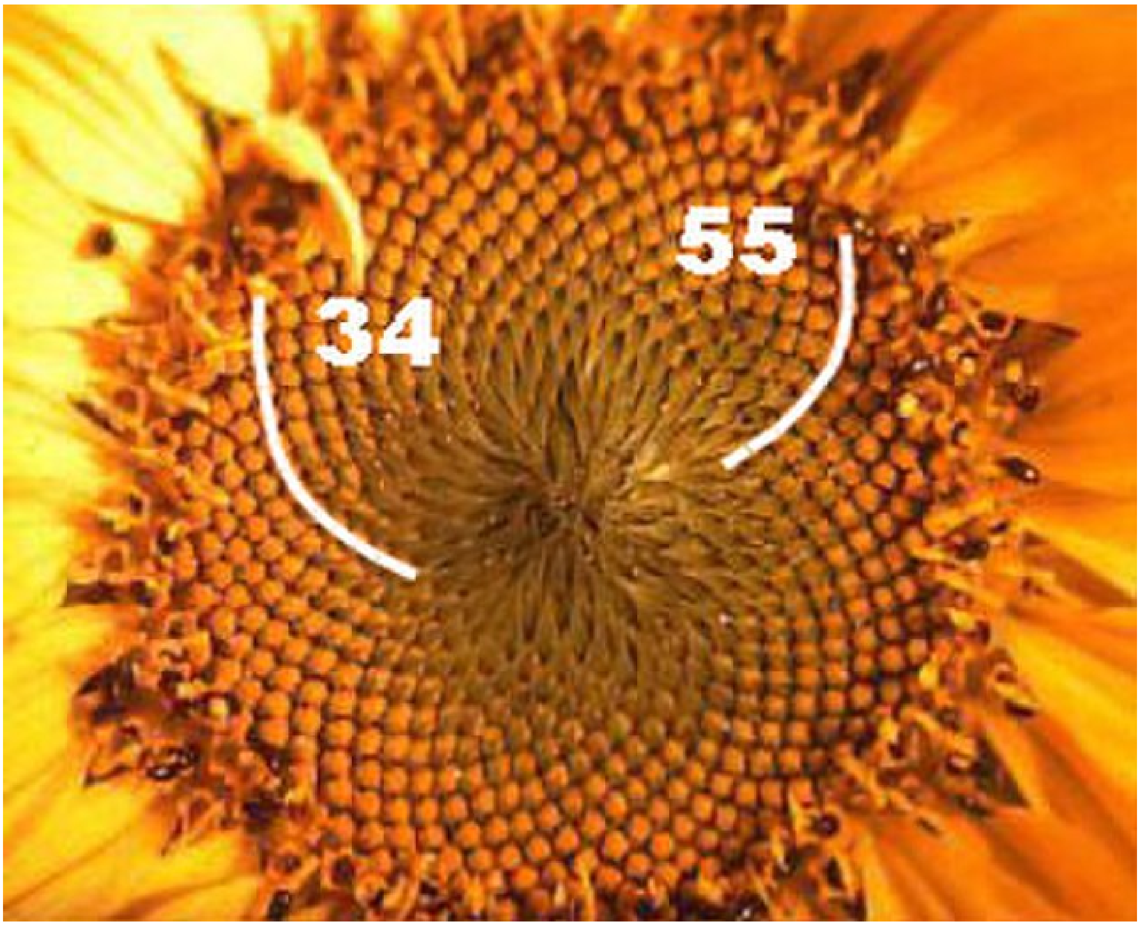
Cahier de calcul

— réponses et corrigés —



La suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Elle apparaît sous de nombreuses formes biologiques, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Ce cahier de calcul est une adaptation pour les classes de BCPST d'un travail réalisé initialement pour l'ensemble des classes préparatoires.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Adaptation BCPST

Pierre-Jean AUBRY, Carine COURANT, Elodie MAILLET

Remerciements

Nous remercions vivement l'équipe coordonnée par Colas BARDAVID pour avoir mis à disposition les sources du cahier initial.

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

L'illustration de la couverture vient de Wikimedia.

L'illustration de la couverture vient de Wikimedia.

Version du 23 août 2022

Sommaire

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2 \times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

1.4 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{25}}$

1.4 c) .... $\boxed{\dfrac{27}{20}}$

1.4 d) .... $\boxed{\dfrac{13}{6}}$

1.4 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

1.4 f) .... $\boxed{\dfrac{9}{10}}$

1.5 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.6 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.6 c) .... $\boxed{1}$

1.6 d) .... $\boxed{2}$

1.7 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.7 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.7 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.8 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.9 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.9 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.9 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.10 .... $\boxed{2t}$

1.11 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}}$

1.11 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}}$

1.11 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}}$

1.12 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.13 .... $\boxed{A > B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40} = \dfrac{8 \times 4}{8 \times 5} = \dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \dfrac{3^4}{3^3} = 3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \dfrac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \dfrac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2 \times 3}{4 \times 3} - \dfrac{1 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12} = \dfrac{6-4}{12} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0{,}2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5}) = -\frac{2}{15} \times (-\frac{5}{6}) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2\times 5}{15\times 6} = \frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$\begin{aligned}(2\times 3\times 5\times 7)(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}) &= \frac{2\times 3\times 5\times 7}{2} + \frac{2\times 3\times 5\times 7}{3} + \frac{2\times 3\times 5\times 7}{5} + \frac{2\times 3\times 5\times 7}{7} \\ &= 3\times 5\times 7 + 2\times 5\times 7 + 2\times 3\times 7 + 2\times 3\times 5 = 105+70+42+30 = 247.\end{aligned}$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24} &= \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5}\right) \times \frac{7}{8} \\ &= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15}\right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.\end{aligned}$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125\times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10}\times 7^3 - 5^{10}\times 7^4}{5^9\times 7^3 + 5^9\times 7^3\times 2^3} = \frac{5^{10}\times 7^3(1-7)}{5^9\times 7^3(1+2^3)} = \frac{5\times(-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1\ 978\times 1\ 979 + 1\ 980\times 21 + 1\ 958}{1\ 980\times 1\ 979 - 1\ 978\times 1\ 979} &= \frac{1\ 978\times 1\ 979 + 1\ 979\times 21 + 21 + 1\ 958}{1\ 979\times(1\ 980 - 1\ 978)} \\ &= \frac{1\ 979\times(1\ 978+21) + 1\ 979}{1\ 979\times 2} = \frac{1\ 979\times(1\ 978+21+1)}{1\ 979\times 2} = \frac{1\ 979\times 2\ 000}{1\ 979\times 2} \\ &= 1\ 000.\end{aligned}$$

1.5 On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5} &= \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.\end{aligned}$$

1.6 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Donc : $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)} = \dfrac{2\ 022}{(2\ 022)^2 + (1-2\ 022)\times(1+2\ 022)} = \dfrac{2\ 022}{(2\ 022)^2 + 1 - 2\ 022^2} = 2\ 022.$

1.6 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2} &= \frac{2\ 021^2}{(2\ 021-1)^2 + (2\ 021+1)^2 - 2} \\ &= \frac{2\ 021^2}{2\ 021^2 - 2\times 2\ 021\times 1 + 1 + 2\ 021^2 + 2\times 2\ 021\times 1 + 1 - 2} \\ &= \frac{2\ 021^2}{2\ 021^2 - 2\times 2\ 021\times 1 + 2\ 021^2 + 2\times 2\ 021\times 1} = \frac{2\ 021}{2\ 021 - 2 + 2\ 021 + 2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.6 c) En posant $a = 1\ 234$, on a : $1\ 235 = a+1$ et $2\ 469 = 2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\ 235\times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234\times 2\ 469 + 1\ 235} = \dfrac{(a+1)(2a+1) - a}{a(2a+1) + a + 1} = \dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1} = 1.$

1.6 d) En posant $a = 1\ 000$, on a : $999 = a-1$, $1\ 001 = a+1$, $1\ 002 = a+2$ et $4\ 002 = 2a+2$.

Donc : $\dfrac{4\ 002}{1\ 000\times 1\ 002-999\times 1\ 001}=\dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)}=\dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)}=\dfrac{2(2a+1)}{2a+1}=2.$

1.7 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}&=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\\&=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.7 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

1.7 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

1.8 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k}=\dfrac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\,\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{n(n^2+1)}{n+1}=\dfrac{n^3+n}{n+1}.$

1.9 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times 6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}.$

1.9 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}.$

1.9 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}.$

1.10 Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

1.11 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

1.11 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

1.12 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\ 215\times 208\ 341=66\ 317\times 104\ 348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impair, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.13 On re-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1.$

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times 10^6+1.$

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times\ (10^6+1)$, on obtient : $A>B$.

....

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) $\boxed{10^8}$

2.1 b) $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) $\boxed{10^2}$

2.1 d) $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) $\boxed{10^4}$

2.1 f) $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) $\boxed{10^{-3}}$

2.2 b) $\boxed{10^{-3}}$

2.2 c) $\boxed{10}$

2.2 d) $\boxed{10^{12}}$

2.2 e) $\boxed{10^4}$

2.2 f) $\boxed{10^{-3}}$

2.3 a) $\boxed{15^4}$

2.3 b) $\boxed{5^{-6}}$

2.3 c) $\boxed{2^7}$

2.3 d) $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.3 e) $\boxed{3^5}$

2.3 f) $\boxed{3^{28}}$

2.4 a) $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.4 b) $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.4 c) $\boxed{2}$

2.4 d) $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.5 a) $\boxed{8}$

2.5 b) $\boxed{11}$

2.5 c) $\boxed{3^{10}}$

2.5 d) $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.6 a) $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.6 b) $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.6 c) $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.6 d) $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.2 b) $10^3\cdot 0{,}01^3 = 10^3\cdot\left(10^{-2}\right)^3 = 10^3\cdot 10^{-6} = 10^{-3}$

2.2 c) $\dfrac{0{,}01^2}{0{,}1^5} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10^1$

2.2 d) $0{,}001^{-2}\cdot 1000^2 = \left(10^{-3}\right)^{-2}\cdot 10^6 = 10^{12}$

2.2 e) $\dfrac{1000\cdot 0{,}01^3}{0{,}1^3\cdot 0{,}01^2} = \dfrac{10^3\cdot 10^{-6}}{10^{-3}\cdot 10^{-4}} = 10^{-3}\cdot 10^7 = 10^4$

2.2 f) $\dfrac{\left(0{,}01^3\right)^{-2}}{0{,}1^{-3}\cdot(100^{-2})^{-3}} = \dfrac{\left(10^{-6}\right)^{-2}}{10^3\cdot(10^{-4})^{-3}} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

2.4 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

2.4 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3.$

2.4 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2.$

2.4 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}.$

2.5 a) On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.5 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11.$

2.5 c) On fait apparaitre les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.5 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5.$

2.6 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

2.6 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

2.6 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

2.6 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche nº 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 - x + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x - 1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x + 2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad (x + 1)(x + 2)}$

3.4 d) ....

$$\boxed{3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right] \quad \text{et} \quad 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)}$$

3.4 e) ....

$$\boxed{2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{233}{16}\right] \quad \text{et} \quad 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)}$$

3.4 f) ....

$$\boxed{-5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right] \quad \text{et} \quad -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)}$$

3.5 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

3.5 b) .... $\boxed{(14x + 3y)(-12x + 3y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(y - 4x^2\right)\left(y + 4x^2\right)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8\left(x^2 + 1\right)(x - 4)(x + 4)}$

3.6 c) .... $\boxed{\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)}$

3.6 d) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)}$

3.6 e) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être “efficace”, il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 - x + 1\right) = [(x + 1)(x - 1)]\left[(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)\right] = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right) = x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right) = \left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right) = x^5-x^3-x^2+1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\ldots$

....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$.

....

3.6 b) On calcule $\left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right)+64x^4-64 = -8\left(x^2+1\right)\left[9x^2-24-8\left(x^2-1\right)\right] = -8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \left(x^2+1\right)-x^2 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) $\boxed{5}$

4.1 b) $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) $\boxed{20}$

4.2 b) $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) $\boxed{12}$

4.2 g) $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) $\boxed{10}$

4.3 a) $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

4.5 e) $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a\leqslant 3$ et $a-3$ si $a\geqslant 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}&=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\&=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2}=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\\&=2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) $\boxed{7a^2 + 12a + 7}$

5.1 b) $\boxed{a^2 - a - 1}$

5.1 c) $\boxed{4a^2 - a - 3}$

5.1 d) $\boxed{-a^2 + 1}$

5.2 a) $\boxed{8 + 6\mathrm{i}}$

5.2 b) $\boxed{8 - 6\mathrm{i}}$

5.2 c) $\boxed{18 - 26\mathrm{i}}$

5.2 d) $\boxed{-9 - 46\mathrm{i}}$

5.3 a) $\boxed{39 - 18\mathrm{i}}$

5.3 b) $\boxed{2197}$

5.3 c) $\boxed{-4 + 43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) $\boxed{1}$

5.4 a) $\boxed{3}$

5.4 b) $\boxed{1}$

5.4 c) $\boxed{1}$

5.5 a) $\boxed{a^2 + 2}$

5.5 b) $\boxed{a^3 + 3a}$

5.5 c) $\boxed{a^4 + 4a^2 + 2}$

5.6 a) $\boxed{\dfrac{q}{p^2}}$

5.6 b) $\boxed{-1}$

5.6 c) $\boxed{0}$

5.6 d) $\boxed{1}$

5.7 a) $\boxed{\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

5.7 b) $\boxed{\left(\dfrac{aC^2}{2g}\right)^{\frac14}}$

5.7 c) $\boxed{\sqrt{g\left(R - \dfrac{d^2}{R}\right)} \text{ ou } -\sqrt{g\left(R - \dfrac{d^2}{R}\right)}}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2 - a) = a^5 - a^4$ et donc $a^5 - a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2 - 1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2-1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2 - a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

5.1 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1 - a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2 = 9 + 6\mathrm{i} + \mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2 = 9 + 6(-\mathrm{i}) + (-\mathrm{i})^2 = 9 - 6\mathrm{i} + \mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3 = (8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i}) = 24 - 18\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3 = 3^3 - 3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1 + 3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2 - (2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24 - 30\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) = 2^2 - (3\mathrm{i})^2 = 4 + 9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4 + \mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3 + 3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5}) - 3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2 + (\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64 + 48\mathrm{i}\sqrt{5} + 60 - 5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8} + 3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8} + 3\cdot\dfrac{3}{8} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4 - 1 = 3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{1234} k = \frac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2+2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2+2)^2 - 2$.

5.6 a) $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2q+p-1}{p^2}$ or $p - 1 = -q$ donc $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$

5.6 b) $\dfrac{pq}{(1-p)^2} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{q} = -1$

5.6 c) $\dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1}{1-p} = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{q}{pq} - \dfrac{p}{pq} = \dfrac{1-p-q}{pq} = 0$

5.6 d) $p + q = 1$ donc $p^3 + 3pq + q^3 = p^3 + 3pq(p+q) + q^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$

5.7 a) $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{k_2+k_1}{k_1k_2}$ donc $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ équivaut à $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

5.7 b) $\dfrac{2mg}{a}\rho - \dfrac{mC^2}{\rho^3} = 0 \iff \dfrac{2mg}{a}\rho = \dfrac{mC^2}{\rho^3} \iff \rho^4 = \dfrac{aC^2}{2g} \iff \rho = \sqrt[4]{\dfrac{aC^2}{2g}}$ (car $\rho > 0$)

5.7 c) On a nécessairement $R - \dfrac{d^2}{R} \geqslant 0$.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{mgd^2}{2R} = \frac{mgR}{2} \iff v^2 + \frac{gd^2}{R} = gR \iff v^2 = g\left(R - \frac{d^2}{R}\right) \iff v = \sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} \text{ ou } v = -\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$$

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

6.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

6.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) .... $\boxed{a, b}$

6.2 f) .... $\boxed{a-b, a+b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

6.4 a) .... $\boxed{1 \text{ donc } (a-b)/(b-c)}$

6.4 b) .... $\boxed{1 \text{ donc } c(a-b)/(a(b-c))}$

6.4 c) .... $\boxed{m \text{ donc } -(m+a+b)}$

6.5 a) .... $\boxed{x^2 - 22x + 117 = 0}$

6.5 b) .... $\boxed{x^2 - 6x - 187 = 0}$

6.5 c) .... $\boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$

6.6 a) .... $\boxed{m = -3/4 \text{ et } x = 3/4}$

6.6 b) ... $\boxed{m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3}$

6.7 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.7 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.7 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.8 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.8 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

6.8 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{4\ln(2)}$

7.1 b) .... $\boxed{9\ln(2)}$

7.1 c) .... $\boxed{-3\ln(2)}$

7.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(2)}$

7.1 e) .... $\boxed{3\ln(2)}$

7.1 f) .... $\boxed{2\ln(2)+2\ln(3)}$

7.2 a) .... $\boxed{-\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 b) .... $\boxed{2\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 c) .... $\boxed{\ln(3)+11\ln(2)}$

7.2 d) .... $\boxed{3\ln(5)+2\ln(2)}$

7.2 e) .... $\boxed{-2\ln(5)+4\ln(2)}$

7.2 f) .... $\boxed{2\ln(5)-2\ln(2)}$

7.3 .... $\boxed{-2\ln(2)-2\ln(5)}$

7.4 a) .... $\boxed{8}$

7.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

7.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}}$

7.4 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

7.4 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

7.4 f) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

7.5 a) .... $\boxed{-2}$

7.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{\ln(2)}}$

7.5 c) .... $\boxed{-17}$

7.5 d) .... $\boxed{1}$

7.6 a) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.6 b) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.6 c) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.6 d) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 a) .... $\boxed{1}$

7.7 b) .... $\boxed{\text{-1}}$

7.8 a) .... $\boxed{x+\ln 2}$

7.8 b) .... $\boxed{\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.8 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

7.8 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{1+x}}$

7.9 a) .... $\boxed{x \geqslant \dfrac{\ln(12)+5}{3}}$

7.9 b) .... $\boxed{x \in [0,1]}$

7.9 c) .... $\boxed{x \geqslant \dfrac{2}{e}}$

7.9 d) .... $\boxed{x \geqslant -\dfrac{1}{12}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln(16) = 4\ln(2)$.

....

7.1 c) On a $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

....

7.1 e) On a $72 = 8\times 9 = 2^3\times 3^2$ donc $\ln(72) - 2\ln(3) = (3\ln(2)+2\ln(3)) - 2\ln(3) = 3\ln(2)$.

....

7.2 c) On a $0{,}875 = \dfrac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln(21)+2\ln(14)-3\ln(0{,}875) &= (\ln(3)+\ln(7)) + 2(\ln(2)+\ln(7)) - 3(\ln(7)-\ln(8))\\ &= \ln(3)+2\ln(3)+3\times 3\ln(2) = 3\ln(3)+11\ln(2).\end{aligned}$$

....

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln(1)-\ln(2)) + (\ln(2)-\ln(3)) + \cdots + (\ln(98)-\ln(99)) + (\ln(99)-\ln(100))$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2\times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{99} (\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{j=2}^{100} \ln(j) \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln(1) - \ln(100) = -2(\ln(2) + \ln(5))$.

7.5 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln(\ln(2))} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln(2))} = (\ln(2))^{-1} = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

7.6 a) f_1 est définie sur $]-2022, +2022[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in \,]-2022, +2022[, \quad f(-x) = \ln\left(\frac{2022-x}{2022+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{2022+x}{2022-x}}\right) = -\ln\left(\frac{2022+x}{2022-x}\right) = -f_1(x).$$

7.6 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) \\ &= \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -f_2(x). \end{aligned}$$

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) .... $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8.1 b) 1

8.1 c) 1

8.1 d) .... -1

8.1 e) .... $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8.1 f) .... $-\dfrac{1}{2}$

8.2 a) 0

8.2 b) 0

8.2 c) .... $-1-\sqrt{3}$

8.2 d) 1

8.2 e) .... $-\dfrac{1}{2}$

8.3 a) .... >0

8.3 b) .... <0

8.3 c) .... <0

8.3 d) .... <0

8.3 e) .... >0

8.3 f) .... >0

8.4 a) 0

8.4 b) .... $-\sin x$

8.4 c) .... $2\cos x$

8.4 d) .... $-2\cos x$

8.5 a) .... $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

8.5 b) .... $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

8.5 c) .... $\sqrt{2}-1$

8.6 a) .... $\tan x$

8.6 b) .... $-\dfrac{1}{\cos(x)}$

8.7 a) .... $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

8.7 a) .... $\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$

8.7 a) .... $\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 b) .... $\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

8.7 b) .... $\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}$

8.7 b) .... $\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 c) .... $\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

8.7 c) .... $\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}$

8.7 c) .... $\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 d) .... $\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

8.7 d) .... $\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right\}$

8.7 d) .... $\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 e) .... $\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\dfrac{7\pi}{4}\right\}$

8.7 e) .... $\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

8.7 e) .... $\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.7 f) .... $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

8.7 f) .... $\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

8.7 f) .... $\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.8 a) .... $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

8.8 a) .... $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

8.8 b) $\boxed{\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]}$

8.8 b) $\boxed{\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]}$

8.8 c) $\boxed{\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 c) $\boxed{\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 d) $\boxed{\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 d) $\boxed{\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 e) $\boxed{\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[}$

8.8 e) $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[}$

8.8 f) $\boxed{\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$

8.8 f) $\boxed{\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]}$

Corrigés

8.5 a) On a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2(\frac{\pi}{8}) - 1$ donc $\cos^2(\frac{\pi}{8}) = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$.

De plus, $\cos(\frac{\pi}{8}) \geqslant 0$ donc $\cos(\frac{\pi}{8}) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

8.5 b) On a $\sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{8}) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) \geqslant 0$ donc $\sin(\frac{\pi}{8}) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

8.5 c) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc $\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \dfrac{2\sin^2(x)}{2\sin x\cos(x)} = \tan(x)$.

8.6 b) $\dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)} - \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \dfrac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos(x)} - \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos(x)} - \dfrac{2\cos^2(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)}$

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ».

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\dfrac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

8.8 f) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos(t) \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 9. Notation arccos, arcsin, arctan

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

9.1 b) .... $\boxed{2}$

9.1 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

9.1 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

9.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

9.1 f) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

9.2 a) .... $\boxed{0}$

9.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

9.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

9.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

9.2 e) .... $\boxed{0}$

9.2 f) .... $\boxed{-\dfrac{\pi}{3}}$

9.3 a) .... $\boxed{1}$

9.3 b) .... $\boxed{\pi - 2}$

9.3 c) .... $\boxed{3}$

9.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{17}}$

9.3 e) .... $\boxed{3 - \pi}$

9.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{\pi}{7}}$

9.4 a) .... $\boxed{1}$

9.4 b) .... $\boxed{0}$

9.4 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

9.4 d) .... $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

9.4 e) .... $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

9.4 f) .... $\boxed{1}$

9.5 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{2}{1+4x^2}}$

9.5 b) .... $\boxed{x \longmapsto 0}$

9.5 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}}$

Corrigés

9.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2.$

....

9.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

....

9.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{6}.$

....

9.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

....

9.3 a) $1 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin(\sin(1)) = 1$

....

9.3 b) $\sin(2) = \sin(\pi - 2)$ et $\pi - 2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin(\sin(2)) = \pi - 2$

....

9.3 c) $3 \in [0; \pi]$ donc $\arccos(\cos(3)) = 3$

....

9.3 d) $\cos\left(-\frac{\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ et $\frac{\pi}{17} \in [0;\pi]$ donc $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{17}\right)\right) = \frac{\pi}{17}$

9.3 e) $\tan(3) = \tan(3-\pi)$ et $3-\pi \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\arctan(\tan(3)) = 3-\pi$

9.3 f) $\tan\left(-\frac{8\pi}{7}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ et $-\frac{\pi}{7} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\arctan\left(\tan\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right) = -\frac{\pi}{7}$

9.4 b) Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

9.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

9.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9.4 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\frac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9.4 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \arctan(x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = 1$.

Fiche n° 10. Dérivation

Réponses

10.1 a) $\boxed{6x^2 + 2x - 11}$

10.1 b) $\boxed{5x^4 - 6x^2 + 4x - 15}$

10.1 c) $\boxed{(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)}$

10.1 d) $\boxed{(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2 - x}{x-2}}$

10.2 a) $\boxed{5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)}$

10.2 b) $\boxed{4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)}$

10.2 c) $\boxed{8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4}$

10.2 d) $\boxed{-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))}$

10.3 a) $\boxed{\dfrac{2x}{x^2+1}}$

10.3 b) $\boxed{\dfrac{1}{x\ln(x)}}$

10.3 c) $\boxed{(-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x)}$

10.3 d) $\boxed{6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))}$

10.3 e) $\boxed{\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}}$

10.3 f) $\boxed{\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}$

10.4 a) $\boxed{\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}}$

10.4 b) $\boxed{\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}}$

10.4 c) $\boxed{-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}}$

10.4 d) $\boxed{\dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}}$

10.5 a) $\boxed{2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

10.5 b) $\boxed{\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}}$

10.5 c) $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2}}$

10.5 d) $\boxed{\dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}}$

10.6 a) $\boxed{\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}}$

10.6 b) $\boxed{\dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}$

10.6 c) $\boxed{\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}}$

10.6 d) $\boxed{\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}$

10.6 e) $\boxed{\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}}$

Corrigés

10.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x+3)(2x-5) + (x^2+3x+2)\times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

10.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2+3)(x^2-5) + (x^3+3x+2)\times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

10.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x-2)\exp(2x) + (x^2-2x+6)\times 2\exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$.

10.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x-1)\ln(x-2) + (3x^2 - x)\times\dfrac{1}{x-2} = (6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

10.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2-5x)^4(2x-5)$.

10.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

10.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

10.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$.
En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

10.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

10.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

10.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

10.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

10.3 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

10.3 f) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

10.4 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 6x\cos(x) + 6\sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

10.4 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

10.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1) \times (x^2+1) - \cos(2x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

10.4 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

10.5 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \times \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

10.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

10.5 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}} \times u'(x) \times \dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \\
&= \frac{1}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

10.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$.

10.6 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2-(3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

10.6 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4-4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x-\frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x-\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

10.6 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4-4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

10.6 d) On calcule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1+(x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1+x^2+2x+1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

10.6 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x))-(1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche n° 11. Primitives

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{\ln|t+1|}$

11.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

11.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

11.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

11.1 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

11.1 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

11.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

11.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

11.2 c) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

11.2 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

11.2 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

11.2 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

11.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4(t)}$

11.3 b) .... $\boxed{2\sqrt{\ln(t)}}$

11.3 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

11.3 d) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

11.3 e) .... $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|}$

11.3 f) .... $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

11.4 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3(t)}$

11.4 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\sin(t)}}$

11.4 c) .... $\boxed{-\ln|\cos(t)|}$

11.4 d) .... $\boxed{-\ln|1-\sin(t)|}$

11.4 e) .... $\boxed{-2\cos(\sqrt{t})}$

11.4 f) .... $\boxed{\tan(t)-t}$

11.4 g) .... $\boxed{2\sqrt{\tan(t)}}$

11.4 h) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin(t))^2}}$

11.4 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

11.5 a) .... $\boxed{2(t-1)\ \text{puis}\ \dfrac{1}{3}t^3-t^2+5t}$

11.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right)\ \text{puis}\ -\dfrac{1}{t}+\ln|t|}$

11.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{3}{t^4}\ \text{puis}\ \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2t^2}}$

11.5 d) .... $\boxed{-\dfrac{4}{t^5}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}}\ \text{puis}\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}}$

11.5 e) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{-3t}\ \text{puis}\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}}$

11.5 f) .... $\boxed{3\mathrm{e}^{3t-2}\ \text{puis}\ \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-2}}$

11.5 g) .... $\boxed{\cos t(3\cos^2(t)-2)\ \text{puis}\ -\dfrac{1}{3}\cos^3(t)}$

11.5 h) .... $\boxed{-\dfrac{2t\sin(\frac{1}{t})+\cos(\frac{1}{t})}{t^4}\ \text{puis}\ \cos(\dfrac{1}{t})}$

11.5 i) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^t}{(2+\mathrm{e}^t)^2}\ \text{puis}\ \ln(2+\mathrm{e}^t)}$

11.5 j) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{2t})}{(2+\mathrm{e}^t)^2}\ \text{puis}\ \arctan(\mathrm{e}^t)}$

11.5 k) .... $\boxed{\dfrac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}\ \text{puis}\ -\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|}$

11.5 l) .... $\boxed{\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\ \text{puis}\ -\sqrt{1-t^2}}$

11.5 m) .... $\boxed{(1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2}\ \text{puis}\ -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}}$

11.5 n) .... $\boxed{\dfrac{\ln(t)-2}{t^2}\ \text{puis}\ \ln(t)-\dfrac{1}{2}\ln^2(t)}$

11.5 o) .... $\boxed{-\dfrac{1+\ln(t)}{t^2\ln^2(t)}\ \text{puis}\ \ln|\ln(t)|}$

11.5 p) .... $\boxed{\dfrac{\cos\ln(t)-\sin\ln(t)}{t^2}\ \text{puis}\ -\cos(\ln(t))}$

Corrigés

11.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

11.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

11.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

11.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

11.1 e) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

11.1 f) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

11.4 f) $\tan^2(\theta) = (1+\tan^2\theta) - 1$,

donc $t \longmapsto \tan(t) - t$ est un primitive de $\tan^2$ sur tout intervalle inclus dans $D_{\tan}$

Fiche n° 12. Calcul d'intégrales

Réponses

12.1 a)........ $\boxed{\text{Positif}}$

12.1 b)....... $\boxed{\text{Négatif}}$

12.1 c)........ $\boxed{\text{Positif}}$

12.2 a)............ $\boxed{14}$

12.2 b)........... $\boxed{50}$

12.2 c).......... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

12.2 d).......... $\boxed{-54}$

12.2 e)............. $\boxed{0}$

12.2 f)............. $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

12.3 a)............. $\boxed{8}$

12.3 b)........... $\boxed{-2}$

12.3 c)............ $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

12.3 d)............. $\boxed{0}$

12.3 e)......... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

12.3 f)......... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

12.4 a)............. $\boxed{0}$

12.4 b)............. $\boxed{1}$

12.4 c)............ $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

12.4 d)........... $\boxed{18}$

12.4 e)...... $\boxed{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}}$

12.4 f)......... $\boxed{-\ln 3}$

12.5 a)........... $\boxed{78}$

12.5 b)..... $\boxed{2(\mathrm{e}^3 - 1)}$

12.5 c). $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

12.5 d).......... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

12.5 e)............. $\boxed{6}$

12.5 f)...... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

12.6 a)............. $\boxed{0}$

12.6 b)............. $\boxed{0}$

12.6 c)..... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

12.6 d).......... $\boxed{\dfrac{1}{384}}$

12.6 e)... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)}$

12.6 f)........... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

12.7 a).... $\boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\mathrm{e}+1}}$

12.7 b)........... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

12.7 c)............ $\boxed{\mathrm{e}^2}$

12.7 d)........ $\boxed{3\mathrm{e} - 4}$

12.7 e)........... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

12.7 f)............. $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

12.8 a)............. $\boxed{0}$

12.8 b)............ $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

12.8 c)......... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

12.8 d)........ $\boxed{\dfrac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}}$

12.8 e)............ $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

12.8 f)........... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

12.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

12.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin(7x)|\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{5} |\sin(7x)|\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

12.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ est donc négative.

12.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

12.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{7} -5\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{7} 5\,\mathrm{d}x$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

12.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

12.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2} \times AB \times (AD + BC) = \dfrac{1}{2} \times 6 \times (3 + 15)$.

12.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\displaystyle\int_{-2}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

12.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

12.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

12.3 b) $\displaystyle\int_{1}^{3} (2x-5)\,\mathrm{d}x = \Big[x^2 - 5x\Big]_1^3 = (3^2 - 15) - (1^2 - 5) = -2.$

12.3 c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} x^2 + x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\right) = \frac{8}{3}.$

12.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.3 e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^5 - x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}.$

12.3 f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{101}.$

12.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.4 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}x = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$

12.4 c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

12.4 d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100} = 18.$

12.4 e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3}.$

12.4 f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1} = -\ln 3.$

12.5 a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{2} = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78.$

12.5 b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^{4} = 2(\mathrm{e}^3 - 1).$

12.5 c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x + 2} = \left[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x + 2|\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right).$

12.5 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

12.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

12.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

12.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

12.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

12.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)(\cos(x))^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos(x))^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

12.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

12.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,\frac{-1}{3}\,\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

12.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\frac{1}{2}.$

12.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^{3}|x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{3} x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

12.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

12.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1) - 2\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

12.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

12.7 f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \left|\frac{1}{2}\sin(2x)\right|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

12.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.8 b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

12.8 c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

12.8 d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}.$

12.8 e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$

12.8 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}.$

Fiche nº 13. Intégration par parties

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2} - 1}$

13.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{5}{2}\cos(2) - \dfrac{1}{2}\sin(2) + \dfrac{3}{2}}$

13.1 c) .... $\boxed{4}$

13.1 d) .... $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}}$

13.1 e) .... $\boxed{1}$

13.1 f) .... $\boxed{2\ln 2 - \dfrac{3}{4}}$

13.1 g) .... $\boxed{\ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}}$

13.1 h) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}}$

13.1 i) .... $\boxed{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{4}{3}}$

13.1 j) .... $\boxed{\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{16\sqrt{2}}{15}}$

13.1 k) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \dfrac{8}{9}\sqrt{2} + \dfrac{4}{9}}$

13.1 l) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}}$

13.2 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}}$

13.2 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}}$

13.2 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}}$

13.2 d) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sin(x) + \cos(x) \end{cases}}$

13.3 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{2} - \mathrm{e}^2}$

13.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}}$

13.4 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -(x^2+2x+2)e^{-x} \end{cases}}$

13.4 b) ....

$\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2 \end{cases}}$

13.4 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}}$

13.4 d) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\ln x + \dfrac{2}{27}\right) \end{cases}}$

Corrigés

13.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \,\mathrm{d}t = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1.$

....

13.1 b) On choisit $u'(t) = \sin(2t)$ et $v(t) = 2t+3$.

$$\int_0^1 (2t+3)\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \left[(2t+3)\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{2}\cos(2) + \frac{3}{2} + \frac{\sin(2)}{2}$$

....

13.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$.

$$\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 - 2\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 4e - 4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 = 4$$

....

13.1 d) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$.

$$\int_1^{\ln(2)} t2^t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\ln(2)} t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)} \mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2}{(\ln(2))^2}$$

13.1 e) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t \,\mathrm{d}t = [t\ln t]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1 \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$

13.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$.

$$\int_1^2 t\ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t \,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

13.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$.

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

13.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t\arctan t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

13.1 i) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$.

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$$

13.1 j) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = t$.

$$\int_0^1 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}\left[(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

13.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t =$ $\displaystyle\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}.$

13.1 l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\big(1+\tan^2 t\big)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) =$ $1+\tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.$

13.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

13.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

13.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

13.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \cos t$, $\displaystyle\int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t = [t\sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x) - 1$. D'où une primitive.

13.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2+3t-4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t+3$ et $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle -\int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2 - \left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2$.

....

13.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\displaystyle\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

....

13.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives (toutes les fonctions utilisées sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On commence par choisir $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t^2$ cela donne $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Puis, on choisit $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t$, ce qui donne $\displaystyle -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 2$.

....

13.4 b) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t$. On commence par choisir $u'(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t^2$ cela donne $\displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 2t\cos(t)\,\mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = 2t$, ce qui donne $\displaystyle -x^2\cos(x) + [2t\sin(t)]_0^x - \int_0^x 2\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2$.

....

13.4 c) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2\ln t\,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $\displaystyle x\ln^2 x - 2[t\ln t]_1^x + 2\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

....

13.4 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2\ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2\ln t\,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\displaystyle\frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\left[t^3\ln t\right]_1^x + \frac{2}{9}\int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}(x^3-1)$. D'où une primitive.

....

Fiche n° 14. Changements de variable

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

14.1 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

14.1 c) .... $\boxed{\ln(\sqrt{2}+1)}$

14.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

14.1 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

14.1 f) .... $\boxed{2\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

14.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)}$

14.2 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{8}}$

14.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}}$

14.3 a) .... $\boxed{2\mathrm{e}^2}$

14.3 b) .... $\boxed{-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1)-4+2\sqrt{3}}$

14.4 a) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x)+\ln(\tan(x)) \end{array}\right.}$

14.4 b) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right) \end{array}\right.}$

14.4 c) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1) \end{array}\right.}$

14.4 d) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2-1} \end{array}\right.}$

Corrigés

14.1 a) On pose $t=\sin\theta$ avec $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\cos\theta$ et donc

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

....

14.1 b) On pose $u=\sqrt{t}$ avec $t\in[1,3]$, donc $t=u^2$ et $u\in\left[1,\sqrt{3}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=2u$ et donc $dt=2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2u}{u+u^3}\,\mathrm{d}u=2\Big[\arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

....

14.1 c) On pose $u=\sin t$ avec $t\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$, On a $\mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t$. On obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}[-\ln(1-u)+\ln(1+u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

....

14.1 d) On pose $u=\sin t$ avec $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\cos t$ et donc $\mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t$.
Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

....

14.1 e) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

14.1 f) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1+u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3)-\ln(2))$.

14.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0,\pi]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et finalement,

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

14.2 b) On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,\mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$.

14.2 c) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = (1+\tan^2 u)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$.

14.2 d) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

14.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1,2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\displaystyle\int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_1^2 - \int_1^2 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^2$.

14.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3},2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u-1)}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[(u-1)\ln(u-1)\Big]_{\sqrt{3}}^2 - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}u = -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}.$$

14.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a,x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sin(t)\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1+\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan(t)$.

On a $\dfrac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sin(t)\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x}\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u+\ln(u)\Big]_{\tan(a)}^{\tan(x)} = \tan(x)+\ln(\tan(x))+C.$

14.4 b) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1+u^2)$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})+C.$

14.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t+\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3+u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\ln(u^2+1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1)+C.$$

14.4 d) La fonction est définie et continue sur $]1,+\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2-1}$ donne $t = \sqrt{u^2+1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x t\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan\sqrt{x^2-1}+C.$$

Fiche n° 15. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

15.1 a) .... $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

15.1 b) .... $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$

15.2 a) .... $2\ln\dfrac{9}{10}$

15.2 b) .... $\ln(a+1)$

15.3 a) .... $\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$

15.3 b) .... $\ln\dfrac{33}{28}$

15.4 a) .... $\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

15.4 b) .... $\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$

15.5 a) .... 1 et 2

15.5 b) ...... $A=-1$ et $B=1$

15.5 c) .... $2\ln\dfrac{4}{3}$

15.6 a) .... $\ln\dfrac{1}{3}$

15.6 b) .... $2\ln\dfrac{4}{3}$

15.6 c) .... $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$

15.6 d) .... $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}$

15.7 .... $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$

15.8 a) .... $\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$

15.9 a) .... $\dfrac{\pi}{4}$

15.9 b) .... $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$

15.9 c) .... $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$

15.10 a) .... $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

15.10 b) ...... $2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

15.10 c) .. $\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}$

15.10 d) ..... $a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}$

15.11 a) .... $\dfrac{1}{2}$

15.11 b) .... $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

15.11 c) .... $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

15.11 d) .... $\ln(2)$

15.12 a) .... $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

15.12 b) ...... $2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

15.12 c) .. $\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}$

15.12 d) ..... $a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}$

15.13 a) .... $\dfrac{1}{2}$

15.13 b) .... $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

15.13 c) .... $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

15.13 d) .... $\ln(2)$

Corrigés

15.1 a) La fonction $t \longmapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1,2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$. D'où le calcul :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(3)-\ln(2).$$

Enfin, on remarque que $\ln(3)-\ln(2)=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

....

15.1 b) On procède comme précédemment mais on remarque qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(2t+1)$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

....

15.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{t+\frac{1}{2}},$$

en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln\big(t+\tfrac{1}{2}\big)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \\ &= 2\Big(\ln\frac{9}{16} - \ln\frac{5}{8}\Big) = 2\ln\frac{9\times 8}{5\times 16} = 2\ln\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Le résultat est < 0 puisque $9/10 < 1$.

C'est cohérent car on intègre une fonction $\geqslant 0$ entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

15.2 b) On calcule :

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+a)\Big]_0^{a^2} = \ln(a+a^2) - \ln(a) = \ln\big(a(a+1)\big) - \ln(a) = \ln(a+1).$$

15.3 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_1^2 = \ln(7) - \ln(3) = \ln\Big(\frac{7}{3}\Big).$$

15.3 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2+\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\Big(t^2+\frac{2}{3}\Big)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{11}{12} - \ln\frac{7}{9} \\ &= \ln\Big(\frac{11\times 9}{12\times 7}\Big) = \ln\frac{33}{28}.\end{aligned}$$

15.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+\sqrt{2}t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(\ln(4) - \ln(1+\sqrt{2})\big) \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4}{1+\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\Big) = \frac{1}{2}\ln\big(4(\sqrt{2}-1)\big) \\ &= \ln\Big(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\Big).\end{aligned}$$

15.4 b) On force à apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{2at}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\Big[\ln(at^2+1)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \\ &= \frac{1}{2a}\big(\ln(a+1) - \ln(2)\big) = \frac{1}{2a}\ln\Big(\frac{a+1}{2}\Big).\end{aligned}$$

15.5 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2} = A + \frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t = 1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t = 1$, on trouve $A = -1$.

De même, on trouve $B = 1$.

15.5 c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t &= 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln(t-2) - \ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-2}{t-1}\Big)\Big]_3^4 \\ &= 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(\ln\frac{2}{3} + \ln(2)\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

15.6 a) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(2-t) - \ln(2+t)\Big]_0^1 = \Big[\ln\Big(\frac{2-t}{2+t}\Big)\Big]_0^1 = \ln\frac{1}{3}.$$

15.6 b) Soit $t \in [2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big[\ln(t-1) - \ln(t)\Big]_2^3 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-1}{t}\Big)\Big]_2^3 = 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

15.6 c) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a $t^2 + 4t + 3 = (t+1)(t+3)$ et

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1) - \ln(t+3)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big[\ln\Big(\frac{t+1}{t+3}\Big)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

15.6 d) Soit $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(\tfrac{1}{2}-t) - \ln(t+\tfrac{1}{2})\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{t+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

15.7 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{t^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}} - \frac{1}{t+\sqrt{a}}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big[\ln(\sqrt{a}-t)+\ln(t+\sqrt{a})\Big]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a}-t}{t+\sqrt{a}}\right)\right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right).$$

15.8 a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{a\,\mathrm{d}u}{a^2(u^2+1)} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

15.9 a) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1)-\arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

15.9 b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

15.9 c) On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\big(\sqrt{2}\big)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\big(\sqrt{2}\big)+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que $\forall x>0,\ \arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$. Donc, on a

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

15.10 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$\begin{aligned}x^2+x+1 &= x^2+(2\times\frac{1}{2}\times x)+1 \\ &= x^2+(2\times\frac{1}{2}\times x)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

15.10 b) On procède comme précédemment mais on commencer par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned}2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2-\frac{3}{2}\times x+\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2-2\times\frac{3}{4}\times x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right) = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}. \qquad \left(\text{car } \tfrac{1}{2}-\tfrac{9}{16}=-\tfrac{1}{16}\right)\end{aligned}$$

15.10 c) On trouve $\sqrt{2}x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}=\sqrt{2}\big(x+\frac{1}{4}\big)^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}$.

15.10 d) On trouve

$$ax^2+a^2x+a^3 = a\big(x^2+ax\big)+a^3 = a\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right)+a^3 = a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^3}{4}.$$

15.11 a) On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

....

15.11 b) Déjà, on a, si $t \in \mathbb{R}$: $t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(en posant } \theta = t+\tfrac{1}{2}\text{)}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

....

15.11 c) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{1/2} \qquad \text{(avec } a = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)}\\ &= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

....

15.11 d) Déjà, on a $6t^2-5t+1 = 6\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)} = 6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t &= \left[\ln\left(\tfrac{1}{2}-t\right) - \ln\left(\tfrac{1}{3}-t\right)\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}\\ &= \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3) - \ln(3/2) = \ln(2).\end{aligned}$$

....

15.12 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$\begin{aligned}x^2+x+1 &= x^2 + (2\times\frac{1}{2}\times x) + 1\\ &= x^2 + (2\times\frac{1}{2}\times x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

....

15.12 b) On procède comme précédemment mais on commencer par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned}2x^2-3x+1 &= 2\Big(x^2-\frac{3}{2}\times x+\frac{1}{2}\Big)\\ &= 2\left(x^2-2\times\frac{3}{4}\times x+\Big(\frac{3}{4}\Big)^2-\Big(\frac{3}{4}\Big)^2+\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\left(\Big(x-\frac{3}{4}\Big)^2-\frac{1}{16}\right)=2\Big(x-\frac{3}{4}\Big)^2-\frac{1}{8}. \qquad \Big(\text{car } \tfrac{1}{2}-\tfrac{9}{16}=-\tfrac{1}{16}\Big)\end{aligned}$$

....

15.12 c) On trouve $\sqrt{2}x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}=\sqrt{2}\big(x+\frac{1}{4}\big)^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}$.

....

15.12 d) On trouve

$$ax^2+a^2x+a^3=a\big(x^2+ax\big)+a^3=a\left(\Big(x+\frac{a}{2}\Big)^2-\frac{a^2}{4}\right)+a^3=a\Big(x+\frac{a}{2}\Big)^2+\frac{3a^3}{4}.$$

....

15.13 a) On calcule

$$\int_0^1\frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

....

15.13 b) Déjà, on a, si $t\in\mathbb{R}$: $t^2+t+1=\big(t+\frac{1}{2}\big)^2+\frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0\frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t&=\int_{-1}^0\frac{1}{\big(t+\frac{1}{2}\big)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\theta^2+\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \Big(\text{en posant } \theta=t+\tfrac{1}{2}\Big)\\ &=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\Big(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\Big)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)-\arctan\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\right)\\ &=\frac{4}{\sqrt{3}}\times\arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)=\frac{4\pi}{\sqrt{3}\times 6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

....

15.13 c) On a

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t&=\int_0^1\frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{\theta^2+\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2}\,\mathrm{d}\theta\\ &=2\int_0^{1/2}\frac{1}{\theta^2+\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{1/2} \qquad \Big(\text{avec } a=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)\\ &=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

....

15.13 d) Déjà, on a $6t^2-5t+1=6\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)$, pour $t\in\mathbb{R}$. Donc,

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t\in\mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\big(t-\frac{1}{2}\big)\big(t-\frac{1}{3}\big)}=6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t&=\Big[\ln\big(\tfrac{1}{2}-t\big)-\ln\big(\tfrac{1}{3}-t\big)\Big]_0^{\frac{1}{4}}=\left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}\\ &=\ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right)-\ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right)=\ln(3)-\ln(3/2)=\ln(2).\end{aligned}$$

....

Fiche n° 16. Systèmes linéaires

Réponses

16.1 a) $\boxed{\{(3,1)\}}$

16.1 b) $\boxed{\{(7,2)\}}$

16.1 c) $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}}$

16.1 d) $\boxed{\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}}$

16.2 a) $\boxed{\left\{\left(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a\right)\right\}}$

16.2 b) $\boxed{(2,-3)}$

16.2 c) $\boxed{\left\{\left(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2\right)\right\}}$

16.2 d) $\boxed{(a-2a^2,a+a^2)}$

16.3 a) $\boxed{\{(1+z,-z,z);z\in\mathbb{R}\}}$

16.3 b) $\boxed{\{(1,y,3+2y);y\in\mathbb{R}\}}$

16.3 c) $\boxed{\left\{\left(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z\right);z\in\mathbb{R}\right\}}$

16.3 d) $\boxed{\left\{\left(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x\right);x\in\mathbb{R}\right\}}$

16.4 a) $\boxed{\{(2,-1,3)\}}$

16.4 b) $\boxed{\{(-1,4,2)\}}$

16.4 c) $\boxed{\varnothing}$

16.4 d) $\boxed{\left\{\left(-\frac{2}{7}-z,\frac{-3}{7},z\right)\,;\,z\in\mathbb{R}\right\}}$

16.5 a) $\boxed{\left\{\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}}$

16.5 b) $\boxed{\varnothing}$

16.5 c) $\boxed{\{(5z,1-4z,z)\,;\,z\in\mathbb{R}\}}$

16.5 d) $\boxed{\left\{\left(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)\right\}}$

16.6 a) $\boxed{\{(5,3,-1)\}}$

16.6 b) $\boxed{\varnothing}$

16.6 c) $\boxed{\left\{\left(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c,\frac{a^2-a-1}{a^3-1}c,\frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c\right)\right\}}$

16.7 a) $\boxed{\{(0,0,0)\}}$

16.7 b) $\boxed{\{(x,y,-x-y)\,;\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}}$

16.7 c) $\boxed{\{(z,z,z)\,;\,z\in\mathbb{R}\}}$

Corrigés

16.1 a)

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+4y=13 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=1 \\ 10y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2\times 1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

16.1 b) $\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-y=5 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x=21 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=7-5=2 \end{cases}$

16.1 c) $\begin{cases} 3x-6y=-3 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ x+\ y=1 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

16.1 d)

$$\begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 6x+2y=3\sqrt{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2} \\ 10y=5\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{3} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

16.2 a) $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y=2 \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ x=1-\dfrac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{4} \\ y=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}a=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{8}a \end{cases}$

16.2 b)

$$\begin{cases} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-aL_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x\ -\ ay=3a+2 \\ (a^2+1)y=-3-3a^2 \end{cases} \underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x=-3a+3a+2=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

16.2 c)

$$\begin{cases} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow 5L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 13x\quad =a+5a^2 \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2x-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

16.2 d)

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \\ y=a+a^2 \end{cases}$$

16.3 a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1-z \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

16.3 b) $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

16.3 c)

$$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \\ y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \end{cases}$$

16.3 d)

$$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 7x\quad+\quad 4z=-\dfrac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=-\dfrac{5}{2}-5x \\ 4z=-\dfrac{25}{6}-7x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \\ z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \end{cases}$$

16.4 a)

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

16.4 b)

$$\left\{\begin{array}{l} a-b-c=-7\\ 3a+2b-c=3\\ 4a+b+2c=4\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} a-b-c=-7\\ 5b+2c=24\\ 5b+6c=32\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{r} a-b-c=-7\\ 5b+2c=24\\ 4c=8\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} a-b-2=-7\\ 5b+2\times 2=24\\ c=2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=-5+4=-1\\ b=4\\ c=2\end{array}\right.$$

16.4 c) $\left\{\begin{array}{l} x+3y+z=1\\ 2x-y+2z=-1\\ x+10y+z=0\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+3y+z=1\\ -7y=-3\\ 7y=-1\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+3y+z=1\\ -7y=-3\\ 0=-4\end{array}\right.$.

Le système est incompatible.

16.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+3z=0\\ 2x-y+2z=-1\\ 4x+5y+4z=1\end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+2L_2\\ L_3\leftarrow L_3+5L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} 7x\ +\quad 7z=-2\\ 2x-y+2z=-1\\ 14x+\quad 14z=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 7x\ +\quad 7z=-2\\ 2x-y+2z=-1\\ 0=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z-\dfrac{2}{7}\\ y=2x+2z+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z-\dfrac{2}{7}\\ \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7}\end{array}\right.$$

16.5 a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1\\ x+2y=2\\ 2x+2z=3\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ y+z=1\\ -2y+4z=1\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ y+z=1\\ 6z=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ \\ y=\dfrac{1}{2}\\ \\ z=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

16.5 b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1\\ x+2y-2z=2\\ 2x-2y+2z=3\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ y-z=1\\ -4y+4z=1\end{array}\right. \underset{L_3\leftarrow L_3+4L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ y-z=1\\ 0=5\end{array}\right.$$

Le système est incompatible.

16.5 c)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1\\ x+2y+3z=2\\ 2x+3y+2z=3\end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ y+4z=1\\ y+4z=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-(1-4z)+z+1\ =\ 5z\\ y=1-4z\end{array}\right..$$

16.5 d)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+(2-a)L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases}$$

On factorise le trinôme $-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

D'où : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y+z \\ y=1-(a+1)\times\dfrac{1}{a+2} \\ z=\dfrac{3-a}{-(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{a+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+2}=1 \\ y=\dfrac{a+2-a-1}{a+2}=\dfrac{1}{a+2} \\ z=\dfrac{1}{a+2} \end{cases}$

16.6 a)

$$\begin{cases} x \quad - \quad 2z=7 \\ 2x-y \quad =7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad 2z=7 \\ -y+4z-7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad 2z=7 \\ -y+4z-7 \\ -7z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}$$

16.6 b)

$$\begin{cases} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_1-L_2}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad z=2 \\ y-z=0 \\ y-z=2 \end{cases}$$

Le système est incompatible.

16.6 c)

$$\begin{cases} x \quad -az=c \\ a\,x-y \quad =c \\ a\,y-z=c \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-aL_1}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad az=c \\ -y+a^2z=(1-a)c \\ a\,y \quad - \quad z=c \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+aL_2}{\iff} \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases}$$

a est un réel différent de 1 donc $a^3-1\neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=c\dfrac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1}=\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{cases}$$

16.7 a)

$$\begin{cases} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow\frac{1}{5}(L_1+L_2+L_3)}{\iff} \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y=0 \\ 2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

16.7 b)

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+y+z=3x \\ x+4y+z=3y \\ x+y+4z=3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z=-x-y$$

16.7 c)

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+y+z=6x \\ x+4y+z=6y \\ x+y+4z=6z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 0=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=z \end{array}\right.$$

Fiche n° 17. Nombres complexes

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

17.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

17.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

17.1 d) .... $\boxed{5}$

17.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

17.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

17.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

17.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

17.2 a) .... $\boxed{12}$

17.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

17.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

17.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

17.2 e) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

17.2 f) .... $\boxed{5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$

17.2 g) ...... $\boxed{10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}}$

17.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) .... $\boxed{\{-i, i\}}$

17.3 b) ... $\boxed{\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}}$

17.3 c) $\boxed{\{1+\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}\}}$

17.3 d) .... $\boxed{\{1-2\mathrm{i}, -1+2\mathrm{i}\}}$

17.4 a) .... $\boxed{1}$

17.4 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

17.4 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

17.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

17.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

17.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2 - 2\times 4\times 3\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

17.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2 - (2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

17.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times 2\times 3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times 5\times 12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4 + 4\times 2\times(-3\mathrm{i})^3 + 6\times 2^2\times(-3\mathrm{i})^2 + 4\times 2^3\times(-3\mathrm{i}) + 2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

17.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

17.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

17.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

17.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

17.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

17.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

17.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

17.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :
$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

17.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit
$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

17.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit
$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

17.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (car $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1$. Et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.
On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

17.3 a) $x^2 = -1 \iff x^2 = i^2 \iff (x-i)(x+i) = 0 \iff x = i$ ou $x = -i$

17.3 b) $x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

17.3 c) $x^2 = 2\mathrm{i} \iff x^2 - 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 0 \iff x^2 - \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0 \iff (x - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}})(x + \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}) = 0$
$\iff x = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $x = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \iff x = 1+i$ ou $x = -1-i$

17.3 d) On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a+\mathrm{i}b)^2 = 3-4\mathrm{i}$ ce qui équivaut à : $a^2-b^2 = 3$, $2ab = -4$ et $a^2+b^2 = 5$
ce système a deux solutions $(a,b) = (1,-2)$ et $(a,b) = (-1,2)$

17.4 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

17.4 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} \\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}, \end{aligned}$$

17.4 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.
Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 18. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

18.1 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)}$

18.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{4}}$

18.1 c) ... $\boxed{-\dfrac{1}{8}\cos(6x)+\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{3}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}}$

18.1 d) ... $\boxed{-\dfrac{\sin(9x)}{8}+\dfrac{3\sin(5x)}{8}-\dfrac{\sin(3x)}{8}-\dfrac{3\sin(x)}{8}}$

18.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\cos(9x)}{8}+\dfrac{3\cos(5x)}{8}+\dfrac{\cos(3x)}{8}+\dfrac{3\cos(x)}{8}}$

18.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\sin(11x)+\dfrac{1}{4}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin(3x)}$

18.2 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$

18.2 b) .... $\boxed{\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

18.2 c) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}}$

18.2 d) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}}$

18.2 e) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

18.2 f) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}}$

18.2 g) .... $\boxed{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}}$

18.2 h) .... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

18.3 a) .... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

18.3 b) .... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

18.4 a) .... $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

18.4 b) .... $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

18.5 a) .... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

18.5 b) .... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

18.5 c) .... $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

18.5 d) .... $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

18.6 a) .... $\boxed{\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

18.6 b) .... $\boxed{\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

18.6 c) .... $\boxed{0}$

Corrigés

18.1 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)+\frac{3}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.\end{aligned}$$

....

18.1 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(2x)\sin^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\\ &= -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)+2\right) = -\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

....

18.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-e^{-9ix}-3(e^{5ix}-e^{-5ix})+e^{3ix}-e^{-3ix}+3(e^{ix}-e^{-ix})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

18.2 a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{\pi}{12}}.$

18.2 b) $1+e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{-\frac{7i\pi}{12}}+e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0} e^{\frac{7i\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{\frac{7i\pi}{12}}e^{-i\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$

18.2 c) $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-\frac{7i\pi}{12}}.$

18.2 d) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1+e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$

18.2 e) $-1-e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}+i\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}.$

18.2 f) $1-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{24}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}.$

18.2 g) On fait le quotient de a) et f).

18.2 h) $\left(1+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$

18.3 a) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{5\pi}{12}}.$

18.3 b) $e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)ie^{5i\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{5i\frac{\pi}{12}+i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{11\pi}{12}}.$

18.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}(e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x))\\ &= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))\\ &= 4\cos^3(x)-3\cos(x).\end{aligned}$$

18.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(e^{4ix}) = \mathrm{Im}\left((e^{ix})^4\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^4\right)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x)+4i\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4i\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

18.5 a) $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{ix}+e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{x+3x}{2}}(e^{i(-x)}+e^{ix})\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2ix}2\cos(x)\right) = 2\cos(2x)\cos(x).$

18.5 b) $\sin(5x)-\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\Big)=\mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\mathrm{i}\sin(x)\Big)=2\cos(4x)\sin(x)$.

18.5 c) $\cos(x)-\cos(3x)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\right)=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(-2\mathrm{i})\sin(x)\Big)=2\sin(x)\sin(2x)$.

18.5 d) $\sin(3x)+\sin(5x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big)=\mathrm{Im}\Big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\cos(x)\Big)=2\sin(4x)\cos(x)$.

18.6 a) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$
$=\mathrm{Im}\Big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\Big)$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$ donc $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3=\dfrac{1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}}\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

18.6 b) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.

Si x est de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, la somme vaut -4.

Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)&=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x})\\&=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\neq 1$ donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^4}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x})}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(4x)}{-2\mathrm{i}\sin(x)}=\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)=\frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)}=\frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

18.6 c) On calcule :

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{2\pi}{3})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{4\pi}{3})}\right)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\underbrace{(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2)}_{=0}\right)=0.$$

Fiche n° 19. Sommes et produits

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{n(n+2)}$

19.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(5n+1)}{2}}$

19.1 d)......... $\boxed{\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}}$

19.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

19.2 b)... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

19.2 c) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

19.2 d) .... $\boxed{5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}}$

19.2 e)... $\boxed{\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)}$

19.2 f) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

19.3 a)................. $\boxed{2^{q-p+1}}$

19.3 b) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

19.3 c) .... $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

19.3 d) .... $\boxed{0}$

19.4 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

19.4 b) .... $\boxed{0}$

19.4 c)...... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

19.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

19.5 a) .... $\boxed{(n+2)^3-2^3}$

19.5 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

19.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

19.5 d)............ $\boxed{(n+1)!-1}$

19.6 a) .... $\boxed{n+1}$

19.6 b)................ $\boxed{1-4n^2}$

19.6 c)...................... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

19.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

19.7 a) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)}{2}}$

19.7 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{4}}$

19.7 c)............... $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

19.7 d) .. $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

19.7 e)......... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

19.7 f)....... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

19.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

....

19.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

....

19.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n}k + (n-1)\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

....

19.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1}k \;-\; 4\sum_{k=2}^{n-1}1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

....

19.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

19.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

19.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2 \frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

19.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1-(\frac{2}{5})^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}.$$

19.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(7^k+4k-n+2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1)+n+4.$$

19.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

19.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

19.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \cdots \times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

19.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

19.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

19.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

19.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

19.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$
$$= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n)$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

19.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

19.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

19.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

19.5 c) En écrivant $k = k + 1 - 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

19.5 d) En écrivant $k = k + 1 - 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1) \times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

19.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1$.

19.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3} = \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-3} \times \frac{2n+1}{2n-3}$$
$$= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1 - 4n^2.$$

19.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.

19.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

19.7 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

19.7 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

19.7 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{3}{2}(j^2-j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j^2\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3\times 2\times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

19.7 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n} 1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j} 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\left[i^2(n+1) - i^3\right] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

19.7 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

19.7 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n} \max(i,j)\\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie}\\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 20. Coefficients binomiaux

Réponses

20.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

20.1 b) .... $\boxed{720}$

20.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

20.1 d) .... $\boxed{15}$

20.1 e) .... $\boxed{56}$

20.1 f) .... $\boxed{140}$

20.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

20.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

20.2 c) .... $\boxed{2^n \times n!}$

20.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

20.3 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

20.3 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

20.3 c) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

20.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

20.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

20.3 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

20.4 a) .... $\boxed{\dbinom{19}{10}}$

20.4 b) .... $\boxed{\dbinom{10}{6}}$

20.4 c) .... $\boxed{\dbinom{10}{5}}$

20.4 d) .... $\boxed{\dbinom{n+1}{p}}$

20.4 e) .... $\boxed{\dbinom{n}{p+1}}$

20.4 f) .... $\boxed{\dbinom{n-1}{p}}$

20.5 a) .... $\boxed{3^n}$

20.5 b) .... $\boxed{0}$

20.5 c) .... $\boxed{6^n}$

20.5 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

20.6 a) .... $\boxed{161\,051}$

20.6 b) .... $\boxed{1{,}030301}$

20.7 a) .... $\boxed{2^n}$

20.7 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

20.7 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

20.7 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

20.8 a) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

20.8 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

20.8 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

20.8 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

Corrigés

20.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

20.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

20.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

20.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

20.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

20.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

20.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

20.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

20.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

20.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente.

On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

20.3 a) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

20.3 b) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

20.3 c) On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} &= \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} \\ &= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.\end{aligned}$$

20.3 d) On calcule $\displaystyle\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1)$.

20.3 e) On réduit au même dénominateur $\displaystyle\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$.

20.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

20.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

20.5 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

20.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^n \times 2^{n-k} \binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n$.

20.5 d) On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n} 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n.\end{aligned}$$

20.6 a) $(10+1)^5 = 10^5 + 5.10^4 + 10.10^3 + 10.10^2 + 5.10 + 1 = 10^5 + 6.10^4 + 10.10^2 + 5.10 + 1 = 161\,051$.

20.6 b) $(1+0{,}01)^3 = 1 + 3.0{,}01 + 3.0{,}0001 + 0{,}000001 = 1{,}030301$.

20.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x = 1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

20.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

20.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

20.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

20.8 a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \times n = n2^{n-1}$

20.8 b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \times n(n-1) = n(n-1)2^{n-2}$

20.8 c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$

20.8 d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

Fiche n° 21. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

21.1 a) .... $\boxed{\{-5, 1\}}$

21.1 b) .... $\boxed{\{\frac{1}{2}\}}$

21.2 a) .... $\boxed{\{3\}}$

21.2 b) .... $\boxed{\{\frac{9}{16}\}}$

21.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

21.3 b) .... $\boxed{1}$

21.3 c) .... $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

21.3 d)............... $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

21.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

21.4 b) .... $\boxed{\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}}$

21.4 c) .... $\boxed{1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

21.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

21.5 a) .... $\boxed{]2, 4[}$

21.5 b) .... $\boxed{\{\frac{1}{2}\}}$

21.6 a) ... $\boxed{x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x}$

21.6 b). $\boxed{x \mapsto \dfrac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

21.6 c)...... $\boxed{x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x}$

21.6 d).......... $\boxed{x \mapsto -\dfrac{1}{1+x^2}}$

21.6 e)................. $\boxed{x \mapsto 0}$

21.6 f).......... $\boxed{x \mapsto \arctan(x)}$

Corrigés

21.1 a) $|x+2| = 3 \iff x+2 = 3$ ou $x+2 = -3 \iff x = 1$ ou $x = -5$

21.1 b) Géométriquement la seule solution est l'abscisse du milieu des points d'abscisse -2 et 3.

$|x+2| = |x-3| \iff (x+2)^2 = (x-3)^2 \iff 4x + 4 = -6x + 9 \iff 10x = 5 \iff x = \dfrac{1}{2}$

21.2 a) Si $x \geqslant -1$ est solution alors $x + 1 = 4$ ou encore $x = 3$ et 3 est bien une solution.

21.2 b) L'étude de $x \longmapsto \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ montre qu'il y a une et une seule solution.

de plus $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 2 \implies \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)^2 = 4 \implies 2x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)} = 4 \implies 2\sqrt{x(x+1)} = -2x + 3 \implies 4x(x+1) = 4x^2 - 12x + 9 \implies x = \dfrac{9}{16}$

21.3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3) = 2x\ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

21.3 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2) = (x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x = x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

21.3 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(3) + 2x\ln(2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

21.3 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} 10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} &\Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10) = \ln(4) + x\ln(5) + \frac{x}{2}\ln(9) \\ &\Leftrightarrow x\left(2\ln(5) + 2\ln(2) - \ln(5) - \frac{2\ln(3)}{2}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2\ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}. \end{aligned}$$

21.4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow$

$x\ln(2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

21.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3\times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

21.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $2\times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4\times 2\times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{1\pm 5}{4}$, i.e. $\dfrac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\dfrac{3}{2}$, donc $2\times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

21.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1+4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\dfrac{-1\pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

21.5 a) Géométriquement : ce sont les abscisses des points sur le disque ouvert de centre 3 et de rayon 1.

$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff 2 < x < 4$

21.5 b) $|2x+1| \geqslant 2 \iff 2x+1 \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad 2x+1 \geqslant 2 \iff x \leqslant -\dfrac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \dfrac{1}{2}$

21.6 a) On n'oublie pas que $2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

21.6 c) On écrit que $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x)+1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

21.6 d) Fonction dérivable sur $]-\infty;.0[$ et sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

21.6 e) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

Fiche n° 22. Suites numériques

Réponses

22.1 a) $\boxed{\dfrac{12}{5}}$

22.1 b) $\boxed{8}$

22.1 c) $\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$

22.1 d) $\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$

22.2 a) $\boxed{13}$

22.2 b) $\boxed{29}$

22.3 a) $\boxed{2}$

22.3 b) $\boxed{2}$

22.4 a) $\boxed{21}$

22.4 b) $\boxed{10\ 000}$

22.4 c) $\boxed{2\ 001}$

22.4 d) $\boxed{10\ 201}$

22.5 a) $\boxed{\dfrac{17}{24}}$

22.5 b) $\boxed{\dfrac{1}{24}}$

22.6 a) $\boxed{\dfrac{3}{512}}$

22.6 b) $\boxed{\dfrac{3069}{512}}$

22.6 c) $\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$

22.6 d) $\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$

22.7 a) $\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$

22.7 b) $\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$

22.8 a) $\boxed{3^n+(-2)^n}$

22.8 b) $\boxed{211}$

22.9 a) $\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}}$

22.9 b) $\boxed{2\sqrt{2}}$

22.10 a) $\boxed{257}$

22.10 b) $\boxed{65\ 537}$

22.10 c) $\boxed{F_n}$

22.10 d) $\boxed{F_{n+1}-2}$

22.10 e) $\boxed{F_{n+1}+2^{2^n+1}}$

22.10 f) $\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

22.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

22.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5}\times 8 = 8$.

22.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

22.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

22.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

22.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

22.3 a) $w_1 = \dfrac{1}{2}\times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

22.3 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

22.4 a) $a_{100} = a_0 + 100\times 2 = 201$.

22.4 b) $s_{100} = \dfrac{100\times(1+199)}{2} = \dfrac{100\times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000$.

22.4 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000\times 2 = 2\ 001$.

22.4 d) $s_{101} = \dfrac{101\times(1+201)}{2} = \dfrac{101\times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201$.

22.5 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}$.

22.5 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}$.

22.6 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}$.

22.6 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\,023}{512} = \dfrac{3069}{512}$.

22.6 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\,024}$.

22.6 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\,047}{1\,024} = \dfrac{6141}{1024}$.

22.7 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$.

22.7 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

22.8 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

22.8 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

22.9 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

22.9 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$.

22.10 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$.

22.10 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$.

22.10 c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2^{n-1} \times 2} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n$.

22.10 d) $F_n \times (F_n - 2) = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = \left(2^{2^{n+1}} - 1\right) = F_{n+1} - 2$.

22.10 e) $F_n^2 = \left(2^{2^n} + 1\right)^2 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 + 2^{2^n + 1} = F_{n+1} + 2^{2^n + 1}$.

22.10 f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2 = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2(F_{n+1} - 1) = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2 \cdot 2^{2^{n+1}} = F_{n+2}$.

Fiche n° 23. Inégalités

Réponses

23.1 a)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.4** d)	$\boxed{\text{Faux}}$
23.1 b)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.4** e)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.1 c)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.4** f)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.1 d)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.4** g)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.1 e)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.5** a)	$\boxed{\text{Faux}}$
23.1 f)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.5** b)	$\boxed{\text{Faux}}$
23.1 g)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.5** c)	$\boxed{\text{Faux}}$
23.1 h)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.5** d)	$\boxed{\text{Faux}}$
23.2 a)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.5** e)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.2 b)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.6** a)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.2 c)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.6** b)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.2 d)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.6** c)	$\boxed{\text{Faux}}$
23.3 a)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.6** d)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.3 b)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.6** e)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.3 c)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.7** a)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.3 d)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.7** b)	$\boxed{\text{Faux}}$
23.4 a)	$\boxed{\text{Vrai}}$	**23.7** c)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.4 b)	$\boxed{\text{Faux}}$	**23.7** d)	$\boxed{\text{Vrai}}$
23.4 c)	$\boxed{\text{Vrai}}$		

Corrigés

23.1 a) $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$ donc *(somme membre à membre de deux encadrement)* $1 - 5 < a + b < 2 - 3$

23.1 b) On n'a jamais $6 < a - b < 5$ car $6 > 5$. En effet, on ne peut soustraire des inégalités, éventuellement multiplier par -1 (avec précaution) puis sommer, ce qui donne $4 < a - b < 7$

23.1 c) $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$ donc $-4 < -2a < -2$ et $-15 < 3b < -9$

donc *(somme membre à membre de deux encadrements)* $-4 - 15 < 3b - 2a < -2 - 9$

23.1 d) On n'a jamais $-5 < ab < -6$ car $-5 > -6$

23.1 e) $-5 < b < -3$ donc ($x \to -\dfrac{1}{x}$ *croissante sur* $\mathbb{R}_-^*$) $\dfrac{1}{5} < -\dfrac{1}{b} < \dfrac{2}{3}$

de plus $1 < a < 2$, donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $\dfrac{1}{5} < -\dfrac{a}{b} < \dfrac{2}{3}$

23.1 f) D'une part $1 < a < 2$ donc $0 < \sqrt{a-1} < 1$, d'autre part $-5 < b < -3$ donc $0 < \dfrac{1}{b^2} < \dfrac{1}{25}$

donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $\dfrac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \dfrac{1}{25}$

23.1 g) $1 < a < 2$ donc $a > 1$ et $a - 1 > 0$ ce qui donne $a^2 - a > 0$ par produit d'inégalités à termes positifs.

23.1 h) faux en prenant par exemple pour $n = 2$

23.2 a) $-ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff (a+b)^2 \geqslant 0$

23.2 b) Il suffit de prendre comme contre-exemple $(a, b) = (1, 0)$

23.2 c) 1er cas : Si $|a| \leqslant 1$, alors $|a| \leqslant 1 + a^2$, 2ème cas : Si $|a| > 1$ alors $|a|^2 > |a|$ donc $|a| \leqslant 1 + a^2$

23.2 d) $a(1-a) \leqslant \dfrac{1}{4} \iff a^2 - a + \dfrac{1}{4} \geqslant 0 \iff \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$

23.3 a) Contre-exemple : $x = \dfrac{\pi}{6}$

23.3 b) Contre-exemple : $x = -\dfrac{\pi}{6}$

23.3 c) $|\sin(x)| \leqslant 1$ donc on multipliant par $|\sin(x)| \geqslant 0$ il vient $(\sin(x))^2 \leqslant |\sin(x)|$

23.3 d) On sait que $1 - \cos(2x) = 2(\sin(x))^2$ et en utilisant le résultat de la question précédente on obtient : $1 - \cos(2x) \leqslant 2|\sin(x)|$

23.4 a) comme $x \in [1, 2]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ donc $0 \leqslant (\ln(x))^n \leqslant (\ln(2))^n$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant 1$.

donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{x+1} \leqslant (\ln(2))^n$

23.4 b) Contre-exemple : $x = 2$ et $n = 1$ sachant que $0 < \ln(2) < 1$ donc $\ln(2)^2 < \ln(2)$

23.4 c) comme $x \in [1, 2]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$ donc $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$

23.4 d) Contre-exemple : $x = 1$ et $n = 1$

23.4 e) On a vu que pour tout $x \in [1, 2]$, $\dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$, donc *(croissance de l'intégrale)* $u_{n+1} \leqslant u_n$

23.4 f) On a vu que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$, donc *(croissance de l'intégrale)* $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$, comme $0 < \ln(2) < 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

23.4 g) On a vu que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$, donc *(croissance de l'intégrale)* $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$, comme $-1 < \ln(2) < 1$, en utilisant le théorème des gendarmes on obtient que (u_n) converge vers 0.

23.5 a) Contre-exemple : $x = 1$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$

23.5 b) Contre-exemple : $x = \dfrac{1}{2}$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$

23.5 c) Contre-exemple : $x = \dfrac{1}{2}$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$

23.5 d) $u_1 < 0$, $u_2 > 0$ et $u_3 < 0$ donc $u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$.

23.5 e) $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_{1/2}^{1} \left| \frac{(\ln(x))^n}{1+x} \right| \mathrm{d}x$ or pour tout $x \in [1/2;1]$, $0 \leqslant |\ln(x)| \leqslant \ln(2)$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$.

Donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}(\ln(2))^n$ de plus $-1 < \ln(2) < 1$ donc ()*théorème des gendarmes*) (u_n) converge vers 0.

23.6 a) Chacun des n termes de la somme est compris entre 0 et 1.

23.6 b) Chacun des n termes de la somme est compris entre $\dfrac{1}{2n}$ et $\dfrac{1}{n+1}$.

23.6 c) $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

23.6 d) $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$

23.6 e) La suite (T_n) est croissante majorée donc elle converge.

23.7 a) $u_{n+1} - u_n = -2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

23.7 b) $u_{n+1} - u_n = -2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$

23.7 c) D'une part : $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$. D'autre part : $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

23.7 d) En sommant les encadrements précédents et en simplifiant les sommes télescopiques, il vient :

$$\sqrt{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{n}$$

donc $-2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 0$ et comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geqslant 0$ donc $-2 \leqslant u_n \leqslant 0$

Fiche n° 24. Polynômes

Réponses

24.1 a)	$\boxed{-X(X+5)}$
24.1 b)	$\boxed{2(X-1)(X+1)}$
24.1 c)	$\boxed{3(X-1)(X+2)}$
24.1 d)	$\boxed{2(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})}$
24.2 a)	$\boxed{(X-1+i)(X-1-i)}$
24.2 b)	$\boxed{3(X-1+2i)(X-1-2i)}$
24.2 c)	$\boxed{i(X+1+i)(X+1-i)}$
24.2 d)	$\boxed{(X-1)(X+i)}$
24.3 a)	$\boxed{X(X-5)(X+5)}$
24.3 b)	$\boxed{(X-1)(X+2)(X-3)}$
24.3 c)	$\boxed{3(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})}$
24.3 d)	$\boxed{3(X+1)(X^2+2)}$
24.3 e)	$\boxed{(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)}$
24.3 f)	$\boxed{(X-1)(X+1)(X^2+1)}$
24.4 a)	$\boxed{3(X+1)(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)}$
24.4 b)	$\boxed{(X-1)(X-i)(X+2i)}$
24.5 a)	$\boxed{(X-i)(X+i)(X+5)}$
24.5 b)	$\boxed{2(X-1-i)(X-1+i)\left(X-\frac{1}{2}\right)}$
24.5 c)	$\boxed{(X-3)^2(X+4)}$
24.5 d)	$\boxed{4\left(X+\frac{1}{2}\right)^2(X-4)}$

Corrigés

24.1 a) On factorise successivement par -1 puis X : $P=-(X^2+5X)=-X(X+5)$.

24.1 b) On remarque que $P=2(X^2-1)$ puis, soit en utilisant une identité remarquable, soit en déterminant les racines (c'est-à-dire en résolvant l'équation du second degré $x^2-1=0$), que $P=2(X-1)(X+1)$.

24.1 c) On remarque que $P=3(X^2+X-2)$ puis, en déterminant les racines, que $P=3(X-1)(X+2)$.

24.1 d) On remarque que $P=2(X^2-2X-1)$ puis, en déterminant les racines, que $P=2(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})$.

24.2 a) En résolvant l'équation du second degré $x^2-2x+2=0$, on trouve que les racines de P sont $1-i$ et $1+i$ et, puisque le coefficient dominant de P est 1, que $P=2(X-1+i)(X-1-i)$.

24.2 b) On remarque que $P=3(X^2-2X+5)$ puis, en déterminant les racines de P, il vient : $P=3(X-1+2i)(X-1-2i)$.

24.2 c) On remarque que $P=i(X^2+2X+2)$ puis, en déterminant les racines de P, il vient : $P=i(X+1+i)(X+1-i)$.

24.2 d) On remarque que 1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P=(X-1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P)=2$). On cherche donc des complexes a et b tels que : $P=(X-1)(aX+b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=(X-1)(X+i)$.

24.3 a) On remarque que $P=X(X^2-25)$ puis, en utilisant une identité remarquable : $P=X(X-5)(X+5)$.

24.3 b) On remarque que 1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P=(X-1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P=(X-1)(aX^2+bX+c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=(X-1)(X^2-X-6)$ puis, en déterminant les racines de $Q=X^2-X-6$: $P=(X-1)(X+2)(X-3)$.

....

24.3 c) On remarque que $P=3(X^3+X^2-2X-2)$ et que -1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P=3(X+1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P=3(X+1)(aX^2+bX+c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=3(X+1)(X^2-2)$ puis, en utilisant une identité remarquable : $P=3(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.

....

24.3 d) On remarque que $P=3(X^3+X^2+2X+2)$ et que -1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P=3(X+1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P=3(X+1)(aX^2+bX+c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=3(X+1)(X^2+2)$. Comme le polynôme X^2+2 n'a pas de racines réelles, on ne va pas plus loin ici dans la factorisation.

....

24.3 e) On peut raisonner comme précédemment en remarquant que -1 et 1 sont racines évidentes de P, on peut donc écrire la factorisation : $P=(X-1)(X+1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P=(X-1)(X+1)(aX^2+bX+c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=(X-1)(X+1)(X^2-4)$ puis, en utilisant une identité remarquable : $P=(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$.
On peut aussi utiliser la factorisation du polynôme $Q=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$ puis remarquer que l'on a $P=Q(X^2)=(X^2-1)(X^2-4)$. On conclut en utilisant des identités remarquables.

....

24.3 f) On utilise les identités remarquables : $P=(X^2-1)(X^2+1)=(X-1)(X+1)(X^2+1)$. Comme le polynôme X^2+1 n'a pas de racines réelles, on ne va pas plus loin ici dans la factorisation.

....

24.4 a) On remarque que $P=3(X^3+X^2+2X+2)$ et que -1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P=3(X+1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des complexes a, b et c tels que : $P=3(X+1)(aX^2+bX+c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=3(X+1)(X^2+2)=3(X+1)\big(X^2-(\sqrt{2}i)^2\big)$ puis en utilisant une identité remarquable : $P=3(X+1)(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)$.

....

24.4 b) On remarque que 1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P=(X-1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des complexes a, b et c tels que : $P=(X-1)(aX^2+bX+c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=(X-1)(X^2+iX+2)$. Comme i est racine évidente de $Q=X^2+iX+2$, on obtient la factorisation $Q=(X-i)(X+2i)$ puis $P=(X-1)(X-i)(X+2i)$.

....

24.5 a) On remarque que $P(i)=0$ donc i est racine de P. Comme P est à coefficients réels, $\bar{i}=-i$ est aussi racine de P et on peut donc écrire la factorisation : $P=(X-i)(X+i)\times Q=(X^2-1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P=(X^2-1)(aX+b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=(X-i)(X+i)(X+5)$.

....

24.5 b) On remarque que $P(1+i)=0$ donc $1+i$ est racine de P. Comme P est à coefficients réels, $\overline{1+i}=1-i$ est aussi racine de P et on peut donc écrire la factorisation : $P=(X-1+i)(X-1+i)\times Q=(X^2-2X+2)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P=(X^2-2X+2)(aX+b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=(X-i)(X+i)(2X-1)=2(X-1-i)(X-1+i)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)$.

....

24.5 c) On remarque que $P(3)=P'(3)=0$ donc 3 est racine multiple de P et on peut écrire la factorisation : $P=(X-3)^2\times Q=(X^2-6X+9)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P=(X^2-6X+9)(aX+b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=(X-3)^2(X+4)$.

....

24.5 d) On remarque que $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=P'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ donc $-\dfrac{1}{2}$ est racine multiple de P et on peut écrire la factorisation : $P=\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2\times Q=\left(X^2+X+\dfrac{1}{4}\right)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P=\left(X^2+X+\dfrac{1}{4}\right)(aX+b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P=\left(X^2+X+\dfrac{1}{4}\right)(4X-16)=$

$4\left(X+\frac{1}{2}\right)^2(X-4)$.

Fiche n° 25. Développements limités

Réponses

25.1 a) .... $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

25.1 b) .... $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

25.1 c) .... $-\dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.1 d) .... $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.2 a) .... $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

25.2 b) .... $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.2 c) .... $\mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \dfrac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

25.2 d) .... $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$

25.3 a) .... $-\dfrac{1}{2}$

25.3 b) .... $\dfrac{2}{3}$

25.3 c) 1

25.3 d) .... $-\dfrac{1}{2}$

25.3 e) .... -1

25.3 f) 0

25.4 a) .... $-\dfrac{1}{2x}$

25.4 b) .... $\dfrac{1}{x^2}$

25.4 c) .... $-\ln(x)$

25.4 d) .... $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{x}$

Corrigés

25.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 3 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = 3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

....

25.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 2. Observez que le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{x+1}$

suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(1 - x + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3).$$

25.1 c) Il suffit d'écrire : $\sin(x)(\cos(x)-1) = \left(x + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4).$

25.1 d) Il suffit d'écrire :

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4).$$

25.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 3) et de l'exponentielle (à l'ordre 2), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right) = \mathrm{e}\exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right).$

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right).$

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2).$

25.2 b) On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)$$
$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \underset{u\to1}{\mathrm{o}}(u^2)$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4).\end{aligned}$$

25.2 c) On a : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $\mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^3)\right).$

D'où : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}(1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \dfrac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3) = \mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \frac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3).$

25.2 d) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$.

Or $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $\frac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t).$

D'où $g(t) = \left(-t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t)\right) = -t + \frac{3}{2}t^2 + \underset{t\to0}{\mathrm{o}}(t^2)$

et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right).$

25.3 a) $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \dfrac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right) - x}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$

25.3 b) $\dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \dfrac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right)}{x\left(\frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2}}$

25.3 c) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right) = 0$

or $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right)$ donc la limite vaut 1.

25.3 d) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)} = \dfrac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x\times x}$

25.3 e) En posant $h=x-1$, $\dfrac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{\ln(1+h)-h}{1-\sqrt{1-h^2}} \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{2}h^2}{\frac{1}{2}h^2}$

25.3 f) $\left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{\tan(x)}\right) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\to} 0$

25.4 a) On a :

$$\frac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)}-\frac{1}{x^2} = \frac{x-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2(\mathrm{e}^x-1)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}$$

25.4 b) $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$

25.4 c) On a : $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x) = -\ln(x)+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)+x\left(\dfrac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(\dfrac{1}{x})\right) \sim -\ln(x)$.

25.4 d) On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \exp\left(x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\
&= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{3x}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

Fiche n° 26. Calcul matriciel

Réponses

26.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

26.1 b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

26.1 c) 17 (matrice 1×1)

26.1 d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

26.1 f) $\begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

26.1 g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

26.1 h) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 i) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

26.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

26.2 e) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

26.2 f) $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

26.2 g) $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

26.2 h) $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

26.2 i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

26.2 j) $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

26.2 k) $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

26.2 l) $n^{k-1}D$

26.3 a) $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

26.3 b) $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$

26.3 c) $2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

26.3 d) $2^{i-j}\dbinom{i-1}{j-1}$

26.4 a) $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

26.4 b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

26.4 c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

26.4 d) $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26.4 e) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

26.4 f) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

26.4 g) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

26.4 h) Non inversible !

26.4 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

26.5 a) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$

26.5 c) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.5 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

26.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

26.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

....

26.2 c) On peut conjecturer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il resterait à le démontrer par récurrence sur k.

....

26.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

....

26.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

....

26.2 f)

On peut conjecturer que pour chaque k il existe un réel u_k tel que $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & u_k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

Cela impose successivement $u_{k+1} = 2^k + 3u_k$, $\dfrac{u_{k+1}}{3^{k+1}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{2^k}{3^k} + \dfrac{u_k}{3^k}$ et enfin $u_k = 3^k - 2^k$

Finalement on conjecture que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$. Il resterait à le démontrer par récurrence sur k.

....

26.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

....

26.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

....

26.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

....

26.2 l) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n^{k-1}D$ Il resterait à le démontrer par récurrence sur k.

....

26.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\displaystyle\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned}
[A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\
&= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}
\end{aligned}$$

26.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

26.3 c) On calcule :

$$[B^\top \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

26.3 d) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leqslant i$. Alors

$$\begin{aligned}
[A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\
&= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}.
\end{aligned}$$

26.4 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\displaystyle\frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

26.4 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2/2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_3 \\ \end{array}$$

Donc B est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

26.4 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C = \pi\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26.4 h) $\mathrm{rg}(H) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -12 & -12 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & -9 & -10 \end{pmatrix} = 3 \neq 4$

26.5 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \end{array}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{1-\lambda}L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{1-\lambda}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda)L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda) \\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-\lambda}L_2 \end{array}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Fiche n° 27. Équations différentielles

Réponses

27.1 a) .... $\boxed{x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}}$

27.1 b) .... $\boxed{x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1}$

27.1 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}}$

27.1 d) .... $\boxed{x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6}$

27.2 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}}$

27.2 b) .... $\boxed{x \mapsto 1 - 2\mathrm{e}^{-2x/7+2}}$

27.2 c) .... $\boxed{x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}}$

27.2 d) .... $\boxed{x \mapsto \left(12 + \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}\right)\mathrm{e}^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2\mathrm{e}}{\pi}}$

27.3 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{2x}}$

27.3 b) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}}$

27.3 c) .... $\boxed{x \mapsto 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}$

27.4 a) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{x}}$

27.4 b) .... $\boxed{x \mapsto 7\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-2x}}$

27.4 c) .... $\boxed{x \mapsto \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}}$

27.4 d) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{x}}$

27.4 e) .... $\boxed{x \mapsto \left(4x + \dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}}$

27.4 f) .... $\boxed{x \mapsto (2-x)\mathrm{e}^{2-2x}}$

27.5 a) .... $\boxed{x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)}$

27.5 b) .... $\boxed{x \mapsto 2\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x) - 1}$

27.5 c) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)}$

27.5 d) .... $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)}$

27.6 a) .... $\boxed{y : t \mapsto y_0\mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$

27.6 b) .... $\boxed{y : t \mapsto y_0\cos(\omega(t-t_0))}$

Corrigés

27.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56\mathrm{e}^{12x}$.

....

27.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6\mathrm{e}^{x} - 1$.

....

27.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8\mathrm{e}^{3x} - 5}{3}$.

....

27.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9\mathrm{e}^{2x} - 6$.

....

27.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = \mathrm{e} = \lambda\mathrm{e}^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{(6-x)/5}$.

27.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \dfrac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

27.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

27.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\dfrac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \dfrac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$.

27.3 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

27.3 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

27.3 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$.

27.4 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

27.4 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2-1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

27.4 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda+\mu = 1$ et $y'(0) = \lambda-2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda+\mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \frac{4}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x}$.

....

27.4 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{x}$.

Alors, $\lambda = 2$ et $\lambda + \mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^{x}$.

....

27.4 e) On note y_0 l'unique solution.

L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont l'unique solution est -2. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x}\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

de plus $x \longmapsto \frac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle, il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

les conditions initiales donnent $\mu + \frac{1}{2} = 2$ et $\lambda - 2\mu = 1$, et ainsi, $y_0 : x \mapsto \left(4x + \frac{3}{2}\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

....

27.4 f) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont la racine double est -2. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-2x}$.

Alors, $y(1) = (\lambda + \mu)e^{-2} = 1$ et $y'(1) = (-2\lambda + \mu - 2\mu)e^{-2} = -3$. Le système s'écrit $\lambda + \mu = e^2$ et $2\lambda + \mu = 3e^2$. Il se réduit en $\lambda + \mu = e^2$ et $\lambda = 2e^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)e^{2-2x}$.

....

27.5 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = 2 = \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)$.

....

27.5 b) On note y_0 l'unique solution.

L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 4 = 0$ dont les solutions sont 2i et -2i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

de plus $x \longmapsto -1$ est une solution de l'équation différentielle,

il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) - 1$.

les conditions initiales donnent $\lambda - 1 = 1$ et $2\mu = 1$, et ainsi, $y_0 : x \mapsto 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$.

....

27.5 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = -1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

....

27.5 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1-\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))$.

Alors, $y_0(0)=0=\lambda$ et $y_0'(0)=1=-\lambda+\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

....

27.6 b) L'équation caractéristique : $x^2+\omega^2=0$ a pour solutions $\mathrm{i}\omega$ et $-\mathrm{i}\omega$. Donc il existe λ et μ tels que : $y(t) = \lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)$

On cherche l'unique fonction de cette forme qui vérifie $y(t_0)=y_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0)=0$.

La fonction $t\mapsto y_0\cos(\omega(t-t_0))$ possède ces trois propriétés caractéristiques, elle est donc la solution.

....

Fiche n° 28. Equations différentielles

Réponses

28.1 a) .... $\boxed{t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}}$

28.1 b) .... $\boxed{t \longmapsto 1}$

28.1 c) .... $\boxed{t \longmapsto t^2 - 2 + 3\,e^{-\frac{t^2}{2}}}$

28.2 a) .... $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)}$

28.2 b) .... $\boxed{t \longmapsto (t+1)e^t}$

28.2 c) .... $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^t + \cos(t) + \sin(t)\right)}$

28.2 d) .... $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{4}(2t+3)e^t + \frac{1}{4}e^{-t}}$

28.3 a) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{3}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}}$

28.3 b) .... $\boxed{t \longmapsto t - 2 + e^{1-t}}$

28.3 c) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}x - \frac{1}{3x^2}}$

28.3 d) .... $\boxed{x \longmapsto \ln(x) \cdot \ln\left(-\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)}$

28.4 a) .... $\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$

28.4 b) .... $\boxed{x \longmapsto 3x^2 - 10x + 21}$

28.4 c) .... $\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{17}{9}}$

28.4 d) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}}$

28.4 e) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}}$

28.4 f) .... $\boxed{x \longmapsto \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{44}{27}x}$

Corrigés

28.1 a) On note f la solution. f vérifie $y' + t\,y = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$

....

28.1 b) On note f la solution.

$t \mapsto 1$ est une solution de $y'(t) + t\,y(t) = t$ et les solutions de $y'(t) + t\,y(t) = 0$ vérifient $\exists k \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}} + 1$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto 1$

....

28.1 c)

Les solutions de $y'(t) + t\,y(t) = 0$ vérifient $\exists k \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = ke^{-\frac{t^2}{2}}$.
Pour trouver une solution particulière on utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $t \longmapsto k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$, ce qui nous amène à trouver une primitive de $t \longmapsto t^3 e^{\frac{t^2}{2}}$.
On trouve ainsi que $t \longmapsto t^2 - 2$ est une solution de $y'(t) + t\,y(t) = t^3$

En notant f la solution on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^2 - 2 + ke^{-\frac{t^2}{2}}$

de plus $f(0) = 1$ ce qui donne $k = 3$. En conclusion f est la fonction $t \longmapsto t^2 - 2 + 3e^{-\frac{t^2}{2}}$

....

28.2 a) On note f la solution.

On remarque que $t \mapsto \frac{1}{2}e^t$ est une solution de $y'(t) + y(t) = e^t$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2}e^t + ke^{-t}$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$

....

28.2 b) En cherchant une solution sous la forme $t \mapsto ate^t$ on trouve que $t \mapsto te^t$ est une solution de $y'(t) - y(t) = e^t$.

La solution f vérifie : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t\mathrm{e}^t + k\mathrm{e}^t$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto (t+1)\mathrm{e}^t$

28.2 c) On note f la solution.

On remarque que $t \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t$ est une solution de $y''(t) + y(t) = \mathrm{e}^t$

donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t + a\cos(t) + b\sin(t)$

de plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ nous donne $a = b = \dfrac{1}{2}$ donc f est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \cos(t) + \sin(t)\big)$

28.2 d) En cherchant une solution sous la forme $t \mapsto at\mathrm{e}^t$ on trouve que $t \mapsto \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t$ est une solution de $y''(t) - y(t) = e^t$.

La solution f vérifie : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t + a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}$

de plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ nous donne $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$ donc f est la fonction $\longmapsto \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^t + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$

28.3 a) On remarque que $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}$ est une solution particulière.

Sur $I = \mathbb{R}$, $\quad y'(x) = x + 2xy(x) \iff y'(x) - 2xy(x) = x \iff \exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = -\dfrac{1}{2} + k\mathrm{e}^{x^2}$

de plus $y(0) = 1$ donne $k = \dfrac{3}{2}$. La solution est la fonction $\longmapsto \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \dfrac{1}{2}$

28.3 b) On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme du premier degré et on trouve que $t \longmapsto t-2$ est une solution de $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t$.

Les solutions de $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ vérifient : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in \mathbb{R},\quad y(t) = (at + b)\mathrm{e}^{-t}$

La solution f vérifie : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t - 2 + (at + b)\mathrm{e}^{-t}$

et enfin $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$ permet de conclure : La solution est la fonction $t \longmapsto t - 2 + \mathrm{e}^{1-t}$

28.3 c) Sur $I =]0; +\infty[$, $\quad x^3y'(x) - x^2y(x) = 1 \iff y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = 0$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = kx$.

La méthode de variation de la constante permet de trouver la solution particulière : $x \longmapsto -\dfrac{1}{2x^2}$

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^3}$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\quad y(x) = kx - \dfrac{1}{2x^2}$.

et enfin $y(1) = 0$ permet de conclure : La solution est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3x^2}$

28.3 d) Sur $I =]0; 1[$, $\quad x\ln(x)y'(x) - y(x) = \ln(x) \iff y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = \dfrac{1}{x}$.

On remarque que ln est une solution non nulle de $y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = 0$ donc l'ensemble des solutions de cette équation homogène est $\{x \longmapsto k\ln(x) \mid k \in \mathbb{R}\}$

La méthode de variation de la constante permet de trouver la solution particulière : $x \longmapsto \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0, 1[$, $\quad y(x) = k\ln(x) + \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$.

et enfin $y(1/2) = 0$ permet de conclure :

La solution est la fonction $x \longmapsto -\ln(x) \times \ln(\ln(2)) + \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$

28.4 a) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on note $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(x) = ax + b$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad a - 2(ax + b) = x \iff -2a = 1$ et $a - 2b = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$

....

28.4 b) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = 3x^2 + 2x + 1 \iff a = 3 \;,\; 4a + b = 2 \;\text{ et }\; 2b + c = 1$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto 3x^2 - 10x + 21$

....

28.4 c) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x + 5 \iff -3a = 1 \;,\; -3b = -3 \;\text{ et }\; 2a - 3c = 5$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto -\dfrac{1}{3}x^2 + x - \dfrac{17}{9}$

....

28.4 d) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 8a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x \iff 2a = 1 \;,\; 6a + 2b = 2 \;\text{ et }\; 8a + 3b + 2c = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}$

....

28.4 e) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2a + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 \iff 3a = 1 \;,\; 3b = 0 \;\text{ et }\; 2a + 3c = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}$

....

28.4 f) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 4$.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on note $(a, b, c, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad (12ax^2 + 6bx + 2c) + 3(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) = 5x^3 - 3x + 5$

$\iff 12a = 5 \;,\; 12a + 9b = 0 \;,\; 6b + 6c = -3 \;\text{ et }\; 2c + 3d = 5$

On en déduit qu'une des solutions polynomiales est $P : x \longmapsto \dfrac{5}{12}x^4 - \dfrac{5}{9}x^3 + \dfrac{1}{18}x^2 + \dfrac{44}{27}x$

....

Fiche n° 29. Fonctions de deux variables

Réponses

29.1 a) .... $\boxed{]0,+\infty[\times[0,+\infty[}$

29.1 b) .... $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}}$

29.1 c) .... $\boxed{\varnothing}$

29.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5y^4+x}$

29.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y\cos(2xy-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2x-1)\cos(2xy-y)}$

29.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}}$

29.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin(x-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x-y)}$

29.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(\mathrm{e}^{xy})-xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}}$

29.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,x^{y-1} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x}$

29.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

29.4 a) .... $\boxed{\sin(2t)}$

29.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}}}$

29.4 c) .... $\boxed{-72\cos(4t)-46\sin(4t)}$

29.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)-\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

29.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)+\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

29.6 a) .... $\boxed{(0,0)}$

29.6 b) .... $\boxed{(0,3)}$

29.6 c) .... $\boxed{(0,0) \text{ et } (-1,-1).}$

29.6 d) .... $\boxed{(0,1) \text{ et } (0,\mathrm{e}^{-2}).}$

29.6 e) .... $\boxed{(0,0),(1,1) \text{ et } (-1,-1).}$

Corrigés

29.2 b) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_y' : t \mapsto 2y\cos(2ty - y)$. On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 2y\cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

29.3 d) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0,0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \dfrac{ty^2}{t^2+y^2}$. Sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{y^2 \cdot (t^2+y^2) - ty^2 \cdot 2t}{(t^2+y^2)^2}$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ en évaluent en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0,0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{\frac{x \cdot 0^2}{x^2+0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$.

29.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))\dfrac{\partial v}{\partial t}(t) = 8\sin t\cos t + 6\cos t(-\sin t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$.

29.5 a) La règle de la chaîne donne $\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$, avec les notations $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u,v) = \dfrac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.

29.6 a) Calculons les dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x+2y$. La résolution est immédiate.

29.6 b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y-6$. On résout et on obtient $x = 0, y = 3$.

29.6 c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2+6y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x-6y$.
On résout et on obtient $(0,0)$ et $(-1,-1)$

29.6 d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y$.
On résout et on obtient $x = 0$ et $(\ln y)^2 + 2\ln y = 0$ d'où $y = 1$ ou $y = \mathrm{e}^{-2}$

29.6 e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x$.
On résout et on obtient $x^3 = y$ et $y^3 = x$ d'où $x = 0$ ou $x^8 = 1$ donc $(0,0), (1,1) et (-1,-1)$.

Fiche n° 30. Séries numériques

Réponses

30.1 a) .... $\boxed{\text{divergente}}$

30.1 b) .... $\boxed{2}$

30.1 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}}$

30.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\times 3^9}}$

30.2 a) .... $\boxed{\mathrm{e}}$

30.2 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^2-3}$

30.2 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$

30.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}}$

30.3 a) .... $\boxed{1}$

30.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

30.3 c) .... $\boxed{\ln(2)}$

30.3 d) .... $\boxed{1}$

30.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

30.4 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$

30.4 c) .... $\boxed{\text{divergente}}$

30.4 d) .... $\boxed{4}$

30.5 a) .... $\boxed{2}$

30.5 b) .... $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

30.5 c) .... $\boxed{16}$

30.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

30.6 a) .... $\boxed{-\dfrac{2}{9}}$

30.6 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

30.6 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^2(2\mathrm{e}^2-1)}{(\mathrm{e}^2-1)^2}}$

30.6 d) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

Corrigés

30.1 a) La série est géométrique de raison $2 \notin\,]-1,1[$, donc elle diverge.

30.1 b) La série est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in\,]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

30.1 c) La série est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}} \in\,]-1,1[$, donc elle converge. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}. \qquad (= 2+\sqrt{2})$$

30.1 d) La série est géométrique de raison $\frac{1}{3} \in\,]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Donc,

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

Autre solution : avec le changement d'indice $j = k-10$, on a

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{j+10}} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^{10}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

30.2 a) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{1^k}{k!}$.

30.2 b) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{2^k}{k!}$, et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$, donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} = \mathrm{e}^2-3$.

30.2 c) On a $\dfrac{1}{2^k\times k!} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ et on reconnaît donc une série exponentielle.

30.2 d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}$ est de même nature que la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k!}$, elle est donc convergente.

de plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = -\left(e^{-1}-1\right)$

30.3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

30.3 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + 1 - \frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

30.3 c) Soit $n \geqslant 2$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n}(2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-1)) = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

30.3 d) Soit $n \geqslant 0$ fixé. On remarque que pour tout k, $\displaystyle\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

30.4 a) On a $\displaystyle\frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4^k}$, donc la série est géométrique de raison $\displaystyle\frac{1}{4} \in]-1,1[$: elle converge. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} - \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12}.$

30.4 b) On a $\displaystyle e^{-(k-1)} = e^{-k}e^1 = e \times \frac{1}{e^k}$. Or la série géométrique de raison $\displaystyle\frac{1}{e} \in]-1,1[$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-(k-1)} = e\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{e^k} - \frac{e}{e^0} = e\left(\frac{e}{e-1} - 1\right) = \frac{e}{e-1}.$

Autre solution : le changement d'indice $j = k-1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-(k-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} (e^{-1})^j = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}.$

30.4 c) La série diverge grossièrement.

30.4 d) On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $\displaystyle\frac{1}{2} \in]-1,1[$, donc convergente, dont la somme vaut

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

30.5 a) On a $\displaystyle k2^{-k} = \frac{1}{2}k\frac{1}{2^{k-1}}$; la série $\displaystyle\sum_k k\frac{1}{2^{k-1}}$ est une série géométrique dérivée, de raison $\displaystyle\frac{1}{2} \in]-1,1[$, et est donc convergente. Sa somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$

30.5 b) La série converge comme somme d'une série géométrique de raison $\displaystyle\frac{1}{3} \in]-1,1[$ et d'une série géométrique dérivée de même raison, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1)\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{3^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{11}{4}.$$

30.5 c) On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois, de raison $\dfrac{1}{2}$, convergente, de somme $\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16$.

30.5 d) On a affaire à une série géométrique dérivée deux fois.

30.6 a) $$\sum_{k=0}^{n} k(-2)^{-k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2}{9}$$

30.6 b) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 3^{-k} = \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n}(k^2-k)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{9}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

30.6 c) $$\sum_{k=0}^{n}(k+2)\mathrm{e}^{-2k} = \mathrm{e}^2\sum_{k=2}^{n+2} k\mathrm{e}^{-2(k-1)} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)^2} - 1\right) = \mathrm{e}^2\left(\frac{e^4}{(\mathrm{e}^2-1)^2} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^2(2\mathrm{e}^2-1)}{(\mathrm{e}^2-1)^2}$$

30.6 d) $$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)\mathrm{e}^{-k} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k\mathrm{e}^{-(k-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)k\mathrm{e}^{-(k-2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^3} = \frac{2\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^3}$$

Fiche n° 31. Algèbre linéaire

Réponses

31.1 a) .... $\boxed{(3,-1)}$

31.1 b) .... $\boxed{(-1,3)}$

31.1 c) .... $\boxed{(9/11, 2/11)}$

31.1 d) .... $\boxed{(-2, 4/5, 11/5)}$

31.1 e) .... $\boxed{(-1, 1/2, 1/2)}$

31.2 a) .... $\boxed{2}$

31.2 b) .... $\boxed{1}$

31.2 c) .... $\boxed{1}$

31.2 d) .... $\boxed{2}$

31.2 e) .... $\boxed{2}$

31.2 f) .... $\boxed{1}$

31.3 a) .... $\boxed{2}$

31.3 b) .... $\boxed{2}$

31.3 c) .... $\boxed{3}$

31.3 d) .... $\boxed{4}$

31.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$

31.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

31.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}}$

31.4 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

31.5 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$

31.5 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}}$

Corrigés

31.1 a) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0,1) - (-1,2)$.

....

31.1 b) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1,2) + 3(0,1)$.

....

31.1 c) Notons $u = \lambda(1,2) + \mu(12,13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \dfrac{9}{11}(1,2) + \dfrac{2}{11}(12,13)$.

....

31.1 d) On note $u = \lambda(0,1,3) + \mu(4,5,6) + \nu(-1,0,1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0,1,3) + \dfrac{4}{5}(4,5,6) + \dfrac{11}{5}(-1,0,1)$.

....

31.1 e) Notons $u = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1) + \nu(-1,-1,3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1,0,1) + \dfrac{1}{2}(1,1,1) + \dfrac{1}{2}(-1,-1,3)$.

....

31.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

....

31.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

31.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

31.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

31.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

31.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

31.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effecutant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

31.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

31.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

31.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

31.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

31.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

31.4 c) $f(1,2)=(4,-1)$ et $f(3,4)=(10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&3\\2&-1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19/2\\9/2\end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix}10\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-43/2\\21/2\end{pmatrix}$. Donc $f(1,2)=-\dfrac{19}{2}(1,2)+\dfrac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4)=-\dfrac{43}{2}(1,2)+\dfrac{21}{2}(3,4)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-19&-43\\9&21\end{pmatrix}$.

31.4 d) Comme $f(1,0,0)=(1,3,0)=(1,0,0)+3(0,1,0)+0(1,1,1)$, $f(0,1,0)=(1,0,1)=0\cdot(1,0,0)-(0,1,0)+(1,1,1)$ et $f(1,1,1)=(2,2,1)=(1,0,0)+(0,1,0)+(1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

31.5 a) Comme $f((1,1))=(2,-1)=(2,0)-(0,1)$ et $f((1,0))=(1,1)=\dfrac{1}{2}(2,0)+(0,1)$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\-1&1\end{pmatrix}$.

31.5 b) Comme $f(0,1,3)=(4,-1)=-1(0,1)+4(1,0)$, $f(4,5,6)=(15,-1)=-1(0,1)+15(1,0)$ et $f(-1,0,1)=(0,-1)=-(0,1)+0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\4&15&0\end{pmatrix}$.

Fiche n° 32. Réduction

Réponses

32.1 a) .... $\boxed{\text{oui} \quad 3}$

32.1 b) .... $\boxed{\text{non}}$

32.1 c) .... $\boxed{\text{oui} \quad \sqrt{2}}$

32.1 d) .... $\boxed{\text{non}}$

32.1 e) .... $\boxed{\text{oui} \quad 0}$

32.2 a) ....
$\boxed{\text{oui} \quad \text{et } \dim(E_\lambda(A)) = 2}$

32.2 b) ....
$\boxed{\text{oui} \quad \text{et } \dim(E_\lambda(A)) = 1}$

32.2 c) ....
$\boxed{\text{oui} \quad \text{et } \dim(E_\lambda(A)) = 1}$

32.2 d) .... $\boxed{\text{non}}$

32.3 a) .... $\boxed{1, -1, 3 \quad \text{oui}}$

32.3 b) .... $\boxed{1, 3 \text{ oui}}$

32.3 c) .... $\boxed{1, 2, 3 \text{ non}}$

32.3 d) .... $\boxed{-1, 5 \text{ oui}}$

32.3 e) .... $\boxed{1 \text{ non}}$

32.4 a) .... $\boxed{2, 4, 6 \text{ oui}}$

32.4 b) .... $\boxed{1, 3, 2 \text{ oui}}$

32.4 c) .... $\boxed{7, 5}$

32.4 d) .... $\boxed{1, 2 \text{ non}}$

Corrigés

32.1 a) $AU = 3U$

....

32.1 b) $AU = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

....

32.1 c) $AU = \sqrt{2}U$

....

32.1 d) $AU = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

....

32.1 e) $AU = 0$

....

32.2 a) $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$ donc (*Théorème du rang*) $\dim(\ker(A - 2I_3)) = 2$

....

32.2 b) $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$ donc (*Théorème du rang*) $\dim(\ker(A - 2I_3)) = 1$

....

32.2 c) $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc (*Théorème du rang*) $\dim(\ker(A)) = 1$

....

32.2 d) $\mathrm{rg}(A) = 3$ donc A est inversible.

....

32.3 a) La matrice est diagonale : les valeurs propres se lisent sur la diagonale.
La matrice est diagonale.

....

32.3 b) La matrice est diagonale : les valeurs propres se lisent sur la diagonale. La matrice est diagonale.

....

32.3 c) La matrice est triangulaire : les valeurs propres se lisent sur la diagonale.
$\dim\ker(A - I_4) = 1$, $\dim\ker(A - 3I_4) = 1$ et $\dim\ker(A - 2I_4) = 1$ donc non diagonalisable.

....

32.3 d) On calcule $\det(A - \lambda I_2) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$. Donc $Sp(A) = \{-1, 5\}$
Il y a deux valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc diagonalisable.

....

32.3 e) On calcule $\det(A - \lambda I_2) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = (\lambda - 1)^2$. Donc $Sp(A) = \{1\}$
Une seule valeur propre, si A est diagonalisable, elle est semblable à I donc égale à I absurde

32.4 a) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

32.4 b) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 3 valeurs propres distinctes donc diagonalisable.

32.4 c) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 5 et 7 comme valeurs propres. $\dim(\ker(A - 7I)) + \dim(\ker(A - 5I)) = 3$ donc A est diagonalisable.

32.4 d) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 5 et 7 comme valeurs propres. $\dim(\ker(A - I)) + \dim(\ker(A - 2I)) = 2$ donc A est non diagonalisable.