

**Mathématiques - mercredi 13 septembre 2023**  
**Devoir n°0 Durée : 45 min**

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Ce sujet est constitué de 6 exercices indépendants que vous pouvez traiter dans l'ordre de votre choix.**
- **Un barème sur 30 points incluant 2 points de présentation est donné est à titre indicatif.**

**Exercice 1** (3 pts). On considère l'assertion  $\mathcal{P} : \forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$ .

1. Cette assertion est-elle vraie ou fausse ? Justifier brièvement.
2. Écrire la négation de  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 2** (3 pts). Écrire les quantités suivantes sous forme de fraction irréductible.

$$1) \frac{25}{9} \quad \left| \quad 2) \frac{9}{15} \quad \left| \quad 3) \frac{1}{180} - \frac{1}{150}$$

**Exercice 3** (3 pts). Développer, pour  $x \in \mathbb{R}^* : (x - \frac{2}{x})^3$

**Exercice 4** (6 pts). Simplifier au maximum les quantités suivantes (on ne demande pas de préciser pour quelles valeurs de  $x$  ou  $y$  les calculs sont valables).

$$1) \frac{(-x^2y)^3 \times (xy)^{-1}}{(y\sqrt{x})^6} \quad \left| \quad 3) \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$2) \frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^3} - \frac{x-3}{(x-1)^3(x+2)^2}$$

**Exercice 5** (8 pts). Résoudre les équations suivantes sur  $\mathbb{R}$ .

$$1) 2x^2 - x - 6 = 0 \quad \left| \quad 3) \frac{1}{x} - x = 0$$

$$2) x^2 - x + 1 = 3x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \quad \left| \quad 4) \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1$$

**Exercice 6** (5 pts).

- 1) Démontrer que  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ .
- 2) En déduire les solutions réelles de l'équation :  $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2\sqrt{2} + 1 = 0$ . On exprimera les solutions sous la forme la plus simple possible.