BCP1B 2023-24

DS0 - Corrigé

ex 1 :

1) Cette phrase est $\boxed{\text{vraie}}$: pour tout $x>0$, il existe bien $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$, il suffit de choisir $y = \sqrt{x}$ car alors $y^2 = \sqrt{x}^2 = x$.

2) NON(P) = $\exists x>0 : \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \neq x$.

ex 2 :

1) $$\frac{\frac{25}{9}}{15} = \frac{25}{9\times 15} = \frac{5\times 5}{9\times 5\times 3} = \boxed{\frac{5}{27}}$$

2) $$\frac{9}{\frac{15}{12}} = \frac{9\times 12}{15} = \frac{3\times 3\times 12}{3\times 5} = \boxed{\frac{36}{5}}$$

3) $$\frac{1}{180} - \frac{1}{150} = \frac{1}{30\times 6} - \frac{1}{30\times 5} = \frac{5}{30\times 6\times 5} - \frac{6}{30\times 5\times 6} = \boxed{\frac{-1}{900}}$$

ex 3 :

On a : $$\left(x-\frac{2}{x}\right)^3 = \left(x-\frac{2}{x}\right)^2\left(x-\frac{2}{x}\right)$$
$$= \left(x^2 - 2x\frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2\right)\left(x-\frac{2}{x}\right)$$
$$= \left(x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}\right)\left(x-\frac{2}{x}\right)$$
$$= x^3 - 4x + \frac{4x}{x^2} - \frac{2x^2}{x} + \frac{8}{x} - \frac{8}{x^3}$$
$$= x^3 - 4x + \frac{4}{x} - 2x + \frac{8}{x} - \frac{8}{x^3}$$
$$= \boxed{x^3 - 6x + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^3}}$$

ex 4 :

1) $\dfrac{(-x^2y)^3 \times (xy)^{-1}}{(y\sqrt{x})^6} = \dfrac{(-1)^3 x^6 y^3 x^{-1} y^{-1}}{y^6 (x^{1/2})^6} = -\dfrac{x^5 y^2}{y^6 x^3} = -\dfrac{x^2}{y^4} = \boxed{-x^2 y^{-4}}$

2) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x+2)^3} - \dfrac{x-3}{(x-1)^3(x+2)^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^3(x+2)^3} - \dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^3(x+2)^3}$

$$= \frac{x^2-1-(x^2-3x+2x-6)}{(x-1)^3(x+2)^3}$$

$$= \boxed{\frac{x+5}{(x-1)^3(x+2)^3}}$$

3) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{x(x-\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \boxed{x+1}$

ex5 :

1) le discriminant de $2X^2-X-6$ est $(-1)^2-4\times 2\times(-6) = 49 > 0$ donc ce polynôme a deux racines : $\dfrac{1+\sqrt{49}}{2\times 2} = \dfrac{8}{4} = 2$ et $\dfrac{1-\sqrt{49}}{4} = \dfrac{-6}{4} = -\dfrac{3}{2}$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $2x^2-x-6=0$ est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{2, -\frac{3}{2}\right\}}$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$x^2-x+1 = 3x^2+\frac{3}{2}x+1 \iff 3x^2-x^2+\frac{3}{2}x+x = 0$

$\iff 2x^2+\frac{5}{2}x = 0$

$\iff x\left(2x+\frac{5}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $2x+\frac{5}{2}=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ou $x=-\frac{5}{4}$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_2=\{0,-\frac{5}{4}\}}$.

3) Pour $x\in\mathbb{R}^*$ (de sorte que $\frac{1}{x}$ a un sens) on a :

$\frac{1}{x}-x=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2=1$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_3=\{1,-1\}}$.

4) Pour $x\in\mathbb{R}_*^+$ (de sorte que $\sqrt{x}$ existe et que $\sqrt{x}\neq 0$ pour que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ait un sens) on a :

$\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sqrt{x}^2-\sqrt{x}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x} \\ -2y^2-y+1=0 \end{cases}$ (*)

Le discriminant de $-2X^2-X+1$ est $(-1)^2-4\times(-2)\times 1=9>0$ donc ce polynôme a deux racines : $\frac{1+\sqrt{9}}{2\times(-2)}=\frac{4}{-4}=-1$ et $\frac{1-\sqrt{9}}{-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$. Dès lors :

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=-1 \text{ ou } y=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}=-1$ ou $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \left\{\frac{1}{4}\right\}.}$

ex 6 :

1) On calcule que $(\sqrt{2}-1)^2 = \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1^2 = 3-2\sqrt{2}$.

Dès lors, $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1|$.

Or $\sqrt{2}-1 \geq 0$ car $\sqrt{2} \geq 1$ car $2 \geq 1$ donc $|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

et donc $\underline{\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1}$.

2) Le discriminant de $\frac{1}{4}X^2 + 2X + 2\sqrt{2}+1$ est

$\Delta = 2^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (2\sqrt{2}+1) = 4 - (2\sqrt{2}+1) = 3-2\sqrt{2}$

Comme $3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 > 0$, on a $\Delta > 0$ donc ce polynôme

admet deux racines :

$$\alpha = \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2\times\frac{1}{4}} = -4+2\sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2\times\frac{1}{4}} = -4-2\sqrt{\Delta}$$

D'après la question 1, on a : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

Ainsi on peut simplifier :

$$\alpha = -4+2(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}-6 \quad \text{et} \quad \beta = -4-2(\sqrt{2}-1) = -2\sqrt{2}-2$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{2\sqrt{2}-6\ ,\ -2\sqrt{2}-2\}}$