Exercice 11
Dans cet exercice, on cherche à trouver au moins une solution de l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle t :
$$(E)\ :\ t^3 - 3t - 4 = 0.$$
La méthode de la substitution de Viète propose de chercher des solutions t de cette équation sous la forme :
$$t = x + \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^*.$$

1. Tous les nombres réels t ne s'écrivent pas forcément sous la forme $x+\frac{1}{x}$. À quelle condition sur t existe-t-il une solution réelle x à l'équation $t = x + \frac{1}{x}$?
2. Montrer que si $t = x + \frac{1}{x}$ alors l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') suivante :
$$(E')\ :\ x^3 + \frac{1}{x^3} - 4 = 0.$$
3. Résoudre l'équation (E') sur $\mathbb{R}$.
4. Quelles solutions de l'équation (E) en déduit-on ?
5. Montrer qu'on a en fait trouvé une seule solution de (E).