## Exercice 5 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$t = x + \frac{1}{x} \iff tx = x^2 + 1 \iff x^2 - tx + 1 = 0 \quad (*)$$

Le discriminant de $X^2 - tX + 1$ est $\Delta = (-t)^2 - 4 \times 1 \times 1 = t^2 - 4$.
Ainsi l'équation $(*)$ admet (au moins) une solution réelle si et seulement si $\Delta \geq 0$ c'est-à-dire lorsque $t^2 - 4 \geq 0$ ou encore $t^2 \geq 4$ ou encore $(t \geq 2$ ou $t \leq -2)$.

Ainsi un réel $t$ peut s'écrire sous la forme $t = x + \frac{1}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$ à condition que $\boxed{t \in ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[}$

n.b : la méthode proposée dans cet exercice ne permet donc pas de déterminer les éventuelles solutions de l'équation (E) appartenant à $]-2, 2[$

2. Si $t = x + \frac{1}{x}$ alors on a :

$$(E) \iff t^3 - 3t - 4 = 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0 \quad (*)$$

Or
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= x^3 + 2x + \frac{1}{x} + x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$$
$$= x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

Ainsi
$$(*) \iff x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$
$$\iff x^3 + \frac{1}{x^3} - 4 = 0$$

On a donc bien $(E) \iff (E')$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 4 = 0 \iff x^6 + 1 - 4x^3 = 0$$
$$\iff (x^3)^2 - 4x^3 + 1 = 0$$
$$\iff x^3 \text{ est racine de } X^2 - 4X + 1 \quad (*)$$

Or le discriminant de $X^2-4X+1$ est $(-4)^2 - 4\times 1\times 1 = 12$ donc ses racines sont $\frac{4+\sqrt{12}}{2} = \frac{4+\sqrt{4}\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$ et $\frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2-\sqrt{3}$.

Ainsi $(*) \iff \left(x^3 = 2+\sqrt{3} \text{ ou } x^3 = 2-\sqrt{3}\right)$
$$\iff \left(x = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} \text{ ou } x = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)$$

L'ensemble des solutions de $(E')$ est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}, \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right\}}$

4. Comme $(E')$ et $(E)$ sont équivalentes sous la condition que $t = x + \frac{1}{x}$, on en déduit que les nombres

$$\boxed{t_1 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{t_2 = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}}$$

sont solutions de $(E)$.

5. En fait, on a $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2+\sqrt{3}$

donc $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}$

et donc $\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$.

Ainsi $\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

et finalement $\boxed{t_1 = t_2}$ donc on a en fait trouvé une seule solution de l'équation $(E)$.