Mathématiques - mercredi 20 septembre 2023
Devoir n°1   Durée : 2 h 30 min

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et continuez l'exercice en effectuant les changements que vous jugez nécessaires.**
- **Ce sujet est constitué de 4 exercices indépendants.**

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

1. Énoncer *et démontrer* l'inégalité triangulaire.
2. Donner sans justification la contraposée de l'implication suivante : $x \geq 2 \implies x^4 \geq 4$.
3. Écrire une fonction Python `fun` prenant en argument deux réels x et y et renvoyant $\dfrac{2x - \frac{1}{2y}}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 2. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}$
2. $-2x^2 - 7x + 4 > 0$
3. $(2-3x)^2 = (x+1)^2$
4. $x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 = 0$
5. $\dfrac{3x-2}{x-1} < 1$
6. $\dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x-2} = x^2 - 3$
7. $\sqrt{x^2-9} < 4$
8. $\sqrt{x+1} > \sqrt{2-x}$

Exercice 3. Pour tout nombre réel m, on considère le polynôme

$$P_m(X) = (m+2)X^2 + 2(2m+1)X + m + 2.$$

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de racines réelles de P_m en fonction de m.

1. Pour quelle valeur de m le polynôme P_m est-il de degré 1 (c'est-à-dire de la forme $aX + b$ avec a et b des nombres réels) ?
2. Combien P_m a-t-il de racines dans ce cas ?

Dans la suite, on suppose que m est différent de cette valeur.

3. Calculer le discriminant Δ_m de P_m.
4. Étudier le signe de Δ_m.
5. Conclure.

Exercice 4. On considère les réels $u = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $v = -\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Le but de l'exercice est de déterminer des expressions plus simples de u et v.

1. (a) Justifier que u et v sont bien définis.
   (b) Calculer $u^3 + v^3$.
   (c) Montrer que $uv = -1$.
   (d) Développer puis simplifier $(u+v)^3$.
2. On pose $\alpha = u + v$, et on considère le polynôme $P(X) = X^3 + 3X - 4$.
   (a) Déduire des questions précédentes que α est racine de P.
   (b) Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que : $P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
   (c) Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue réelle x.
   (d) En déduire que $\alpha = 1$.
3. On considère le polynôme $Q(X) = (X-u)(X-v)$.
   (a) Développer $Q(X)$ et donner une expression plus simple de ce polynôme.
   (b) En déduire des expressions plus simples de u et v.