Mathématiques - mercredi 20 septembre 2023
Devoir n°1 Corrigé

Exercice 1 (Questions de cours)**.**

1. Énoncer *et démontrer* l'inégalité triangulaire.
2. Donner sans justification la contraposée de l'implication suivante : $x \geq 2 \implies x^4 \geq 4$.
3. Écrire une fonction Python `fun` prenant en argument deux réels x et y et renvoyant $\dfrac{2x - \frac{1}{2y}}{\sqrt{x^2+1}}$

Solution :

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $|x+y| \leq |x| + |y|$. En effet :
   D'une part, $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
   D'autre part, $(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = x^2 + 2|xy| + y^2$.
   Or $xy \leq |xy|$ donc $x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2$ donc $|x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$.
   Comme les deux quantités $|x+y|$ et $|x|+|y|$ sont positives, on peut en déduire en passant à la racine carrée que : $|x+y| \leq |x| + |y|$ ce qu'il fallait démontrer.
2. Il s'agit de : $x^2 < 4 \implies x < 2$.
3.

```python
def fun(x,y):
    num = 2*x - 1/(2*y)
    denom = (x**2 + 1)**(1/2)
    return num/denom
```

Exercice 2. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue réelle x :

1. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
2. $-2x^2 - 7x + 4 > 0$
3. $(2-3x)^2 = (x+1)^2$
4. $x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0$
5. $\frac{3x-2}{x-1} < 1$
6. $\frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x-2} = x^2 - 3$
7. $\sqrt{x^2-9} < 4$
8. $\sqrt{x+1} > \sqrt{2-x}$

Solution :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} &\iff \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) x = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\\ &\iff \frac{7}{6}x = \frac{7}{12}\\ &\iff x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Ainsi, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\frac{1}{2}\right\}.}$

2. Le discriminant du polynôme $-2X^2 - 7X + 4$ est $\Delta = (-7)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 81 = 9^2$ donc ses racines sont $\frac{7+9}{2 \times (-2)} = -4$ et $\frac{7-9}{-4} = \frac{1}{2}$. Comme de plus son coefficient dominant est $-2 < 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left]-4, \frac{1}{2}\right[.}$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}(2-3x)^2 = (x+1)^2 &\iff \big(2 - 3x = x + 1 \;\text{ ou }\; 2 - 3x = -x - 1\big)\\ &\iff \big(1 = 4x \;\text{ ou }\; 3 = 2x\big)\\ &\iff \left(x = \frac{1}{4} \;\text{ ou }\; x = \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_3 = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}.}$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} x^4 - \frac{1}{2}x^2 = 0 &\iff x^2\Big(x^2 - \frac{1}{2}\Big) = 0 \\ &\iff \Big(x^2 = 0 \text{ ou } x^2 - \frac{1}{2} = 0\Big) \\ &\iff \Big(x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}\Big) \\ &\iff \Big(x = 0 \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.}$

5. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3x-2}{x-1} < 1 &\iff \frac{3x-2}{x-1} - 1 < 0 \\ &\iff \frac{3x-2-(x-1)}{x-1} < 0 \\ &\iff \frac{2x-1}{x-1} < 0. \end{aligned}$$

On résout alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

- $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$,
- $x - 1 > 0 \iff x > 1$,

puis on dresse le tableau de signes suivant :

x		$\frac{1}{2}$		1	
$2x-1$	$-$	0		$+$	
$x-1$		$-$		0	$+$
$\frac{2x-1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

On y lit alors l'ensemble des solutions $\boxed{\mathcal{S}_5 = \left]\frac{1}{2}, 1\right[.}$

6. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x-2} = x^2 - 3 &\iff x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x^2-3)(x-2) \\ &\iff x^3 - x^2 - 8x + 12 = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 \\ &\iff x^2 - 5x + 6 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $X^2 - 5X + 6$ est $(-5)^2 - 4 \times 6 = 1$, ses racines sont $\frac{5-1}{2} = 2$ et $\frac{5+1}{2} = 3$. Or on travaille avec $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_6 = \{3\}.}$

7. On résout pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 9 \geq 0$ i.e. $x^2 \geq 9$ i.e. ($x \geq 3$ ou $x \leq -3$). Pour $x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$ on a :

$$\sqrt{x^2 - 9} < 4 \iff x^2 - 9 < 16 \iff x^2 < 25 \iff -5 < x < 5$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_7 =]-5, -3] \cup [3, 5[.}$

8. On travaille pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + 1 \geq 0$ et $2 - x \geq 0$ c'est-à-dire pour $x \in [-1, 2]$, on a alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} > \sqrt{2-x} &\iff x + 1 > 2 - x \\ &\iff 2x > 1 \\ &\iff x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathcal{S}_8 = \left]\frac{1}{2}, 2\right].}$

Exercice 3. Pour tout nombre réel m, on considère le polynôme

$$P_m(X) = (m+2)X^2 + 2(2m+1)x + m + 2.$$

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de racines réelles de P_m en fonction de m.

1. Pour quelle valeur de m le polynôme P_m est-il de degré 1 (c'est-à-dire de la forme $aX+b$ avec a et b des nombres réels) ?
2. Combien P_m a-t-il de racines dans ce cas ?

Dans la suite, on suppose que m est différent de cette valeur.

3. Calculer le discriminant Δ_m de P_m.
4. Étudier le signe de Δ_m.
5. Conclure.

Solution :

1. P_m est de degré 1 lorsque $m+2=0$ i.e. lorsque $\boxed{m=-2.}$
2. Dans ce cas, $P_m(X) = 2(3\times(-2)+1)X + (-2) + 2 = -10X$, donc P_m n'admet qu'une seule racine, 0.
3. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_m &= (2(2m+1))^2 - 4(m+2)(m+2)\\
&= 4\Big(\times (2m+1)^2 - (m+2)^2\Big)\\
&= 4(2m+1+m+2)(2m+1-(m+2))\\
&= 4(3m+3)(m-1)\\
&\boxed{= 12(m^2-1)}
\end{aligned}$$

4. Le nombre de racines de P_m est donné par le signe de Δ_m. Or :

$$\Delta_m > 0 \iff m^2-1>0 \iff m^2>1 \iff m>1 \text{ ou } m<-1$$

Ainsi :

- si $m \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ alors $\Delta_m > 0$ et donc P_m a deux racines réelles (à l'exception du cas $m=-2$),
- si $m=1$ ou $m=-1$ alors $\Delta_m = 0$ et donc P_m admet une seule racine réelle,
- si $-1<m<1$ alors $\Delta_m<0$ et donc P_m n'admet aucune racine réelle.

En conclusion :

- si $m \in]-1,1[$, P_m n'admet aucune racine réelle,
- si $m \in \{-2,-1,1\}$, P_m admet une unique racine réelle, et
- si $m \in]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup]1,+\infty[$, P_m admet deux racines réelles.

Exercice 4. On considère les réels $u = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $v = -\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Le but de l'exercice est de déterminer des expressions plus simples de u et v.

1. (a) Justifier que u et v sont bien définis.
   (b) Calculer $u^3 + v^3$.
   (c) Montrer que $uv = -1$.
   (d) Développer puis simplifier $(u+v)^3$.
2. On pose $\alpha = u + v$, et on considère le polynôme $P(X) = X^3 + 3X - 4$.
   (a) Déduire des questions précédentes que α est racine de P.
   (b) Déterminer trois nombres réels a, b, c tels que : $P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
   (c) Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue réelle x.
   (d) En déduire que $\alpha = 1$.
3. On considère le polynôme $Q(X) = (X-u)(X-v)$.
   (a) Développer $Q(X)$ et donner une expression plus simple de ce polynôme.
   (b) En déduire des expressions plus simples de u et v.

Solution :

1. (a) Comme $2+\sqrt{5} > 0$ et que $\sqrt{5}-2 > 0$ (puisque $\sqrt{5} > 2$ car $5 > 4$), on peut bien parler des racines cubiques de ces nombres : u et v sont donc bien définis.
   (b) On a :
$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3 + \left(-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\ &= 2+\sqrt{5} + (-1)^3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 \\ &= 2+\sqrt{5} - (\sqrt{5}-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$
   Ainsi $\boxed{u^3 + v^3 = 4.}$
   (c) On a :
$$\begin{aligned} uv &= \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \times \left(-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) \\ &= -\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)} \\ &= -\sqrt[3]{\sqrt{5}^2 - 2^2} \\ &= -\sqrt[3]{1} = -1 \end{aligned}$$
   Ainsi $\boxed{uv = -1.}$
   (d) On a :
$$\begin{aligned} (u+v)^3 &= (u+v)^2(u+v) \\ &= (u^2 + 2uv + v^2)(u+v) \\ &= u^3 + 2u^2v + uv^2 + u^2v + 2uv^2 + v^3 \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= (u^3+v^3) + 3uv(u+v) \\ &= 4 - 3(u+v) \end{aligned}$$
   Ainsi $\boxed{(u+v)^3 = 4 - 3(u+v).}$

2. (a) On a :

$$P(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha - 4 = (u+v)^3 + 3(u+v) - 4 = 0$$

d'après la question précédente. Ainsi α est racine de P.

(b) Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a l'égalité de polynômes suivante :

$$\begin{aligned}(X-1)(aX^2+bX+c) &= aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c \\ &= aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c\end{aligned}$$

Il reste donc à trouver a, b, c de sorte que ce polynôme soit égal à $X^3 + 3X - 4$ c'est-à-dire de sorte que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 3 \\ -c = -4 \end{cases}$$

On constate que $a = 1$, $b = 1$ et $c = 4$ satisfont ces quatre équations.
Ainsi $\boxed{P(X) = (X-1)(X^2+X+4).}$

(c) D'après la question précédente, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = 0 \iff (x-1)(x^2+x+4) = 0 \iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + x + 4 = 0$$

Or le discriminant de $X^2 + X + 4$ est $1^2 - 4 \times 4 = -15 < 0$, donc l'équation $x^2 + x + 4 = 0$ n'a pas de solution réelle.
Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ est $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}.}$

(d) La question précédente montre que P n'a qu'une seule racine réelle, 1. La première question montre, elle, que α est une racine de P. On en déduit que $\alpha = 1$.

3. (a) On a d'après les questions précédentes :

$$Q(X) = (X-u)(X-v) = X^2 - (u+v)X + uv = X^2 - \alpha X + uv = X^2 - X - 1.$$

Ainsi $\boxed{Q(X) = X^2 - X - 1.}$

(b) D'après la définition de Q, les nombres u et v sont les racines de Q.
Mais d'après la question précédente, le discriminant de Q est $(-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$, donc ses racines sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Comme de plus, u est positif et v négatif, on conclut finalement que
$\boxed{u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } v = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.}$