Remédiation 3 : exo 8

Le dessin illustre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Montrons-le par récurrence.

Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ donc la formule est vraie au rang 1

Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 4(n+1)\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 2\times 2n + 2^2\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$ ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi par récurrence, on a bien prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.