TD 2 : exo 3

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = \cos(x) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : 3x = x + 2k\pi$ ou $3x = -x + 2k\pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi$ ou $x = \frac{k\pi}{2}$

$S_1 = \{k\pi, \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = \sin(x) \iff \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ ou $3x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$S_2 = \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3) On travaille pour x tel que $x, 3x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Or, pour $k \in \mathbb{Z}$,
$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.
Ainsi on travaille pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$, et on a :

$\tan(3x) = \tan(x) \iff \exists k \in \mathbb{Z} : 3x = x + k\pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{k\pi}{2}$

Or les valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont exclues, donc l'ensemble des solutions est $S_3 = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

4) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0 \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ $(*)$

Après calcul, les racines de $X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$ sont 1 et $\frac{1}{2}$ (n.b : $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$!)

Ainsi : $(*) \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\iff \cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = \frac{1}{2}$

$\iff \cos(x) = \cos(0)$ ou $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3})$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$S_4 = \{2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

5) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \iff 1 - \cos^2(x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2$$

$$\iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ y^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} y + 1 = 0 \end{cases}$$

$\iff (\dots)$ (même méthode que 4))

$$\iff \cos(x) = \sqrt{2} \text{ ou } \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où $S_5 = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = -2\cos(x) - 1 \iff 2\cos^2(x) - 1 = -2\cos(x) - 1$$

$$\iff \cos^2(x) + \cos(x) = 0$$

$$\iff \cos(x)\left(\cos(x) + 1\right) = 0$$

$$\iff \cos(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -1$$

d'où $S_6 = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$= \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7) $S_7 = \left\{ \frac{7\pi}{24} + k\pi, \frac{\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$