4 Calcul de phase et d'amplitude

En physique, on obtient souvent des expressions du type

$$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \quad \text{où } a, b, \theta \in \mathbb{R}.$$

Il est pourtant souvent plus facile de manipuler des expressions du type

$$r\cos(\theta + \varphi)$$

$r > 0$

où $r \in \mathbb{R}^+$ s'appelle l'*amplitude* et $\varphi \in \mathbb{R}$ s'appelle la *phase*.
En fait, on peut passer d'une écriture à l'autre à travers le théorème suivant :

Proposition 1
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Il existe un unique $r \in \mathbb{R}^+$ et un unique $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que :

$(a,b) \neq (0,0)$

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = r\cos(\theta + \varphi).$$

Ils sont donnés par : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ solution de :

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{r} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{-b}{r} \end{cases}$$

⚠ $\ominus b$

Exemple : cherchons r et φ tels que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{3}\cos(\theta) + \sin(\theta) = r\cos(\theta + \varphi).$$

Le théorème affirme qu'il faut choisir $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

puis φ solution de $\begin{cases} \cos(\varphi) = \sqrt{3}/2 \\ \sin(\varphi) = -1/2 \end{cases}$

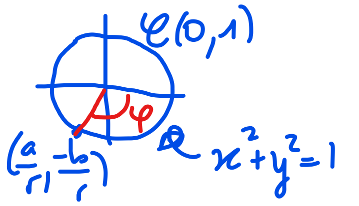
On constate que $\varphi = -\pi/6$ convient.
Le théorème affirme donc que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sqrt{3}\cos(\theta) + \sin(\theta) = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

On peut le vérifier, en développant grâce à la formule donnant $\cos(a + b)$:

$$2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos(\theta)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \sin(\theta)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos(\theta)\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(\theta) \times \frac{-1}{2}\right)$$
$$= \sqrt{3}\cos(\theta) + \sin(\theta)$$

Démonstration du théorème :
Posons donc $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Comme $(a,b) \neq (0,0)$ on a $r \neq 0$, on peut donc s'intéresser au système $(*)\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{r} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{-b}{r} \end{cases}$ d'inconnue φ.



Comme $\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{-b}{r}\right)^2 = \dfrac{a^2+(-b)^2}{r^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

le couple $\left(\dfrac{a}{r}, -\dfrac{b}{r}\right)$ correspond aux coordonnées d'un point du cercle trigonométrique. Il existe donc bien $\varphi \in \mathbb{R}$ solution de $(*)$: on peut prendre par exemple $\varphi = \arccos(a/r)$ si $b \leq 0$ et $\varphi = -\arccos(a/r)$ si $b \geq 0$.

Enfin, pour cette valeur de φ, on a alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$r\cos(\theta+\varphi) = r\big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\big)$$
$$= r\left(\cos(\theta)\frac{a}{r} - \sin(\theta)\times\frac{-b}{r}\right)$$
$$= a\cos(\theta) + b\sin(\theta).$$

L'unicité est admise.

□

Exercice 1
Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\underbrace{\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)}_{a\cos(x)+b\sin(x)} = \sqrt{2}$ | 2. $\cos(x) + \sin(x) = 1$

$a\cos(x)+b\sin(x) \longrightarrow r\cos(x+\varphi)$

1) On pose $r = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$, puis on cherche φ tel que

$\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = -\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ On constate que $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ convient.

Ainsi, on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos(x+\pi/3)}$. Ainsi :

$\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} \iff 2\cos(x+\pi/3) = \sqrt{2}$

$\iff \cos(x+\pi/3) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

ou $x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

$S = \left\{-\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi, -\dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$