Feuille de cours 3 : suites usuelles

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on la note typiquement u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore $(u_n)_{n\geq 0}$.

Attention : $(u_n) \neq u_n$

la suite — le nombre (ou terme général de la suite)

c'est similaire à la différence entre : $f \neq f(x)$

fonction — la valeur de la fonction en x

On peut distinguer deux façons de définir des suites :

- de manière explicite, c'est-à-dire en donnant l'expression de u_n en fonction de n. Par exemple : la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3n^2 + e^n$.
- de manière implicite, c'est-à-dire en donnant le (ou les) premier terme, et une relation de récurrence expliquant comment obtenir un terme de la suite en fonction du (ou des) précédent. Par exemple : la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + e^{u_n}$.

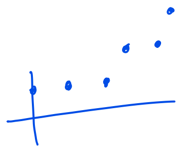
⚠ graphie $u_{n+1} \neq u_n + 1$

Dans ce cours, on s'intéresse à des suites définies de manière implicite, mais qui sont suffisamment simples pour qu'on puisse en obtenir une écriture explicite.

On rappelle enfin quelques définitions de base concernant la monotonie des suites :

Définition 1
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite :

- constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$) ou encore $\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c$
- stationnaire lorsque : (u_n) est cste à partir d'un certain rang : $\exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p,\ u_{n+1} = u_n$
- croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
- strictement croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$
- décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$
- strictement décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$
- monotone lorsque : (u_n) est croissante ou décroissante
- strictement monotone lorsque : (u_n) est str^t croissante ou str^t décroissante



suite croissante mais non strictement croissante

Remarque 2
Attention, il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple la suite $(u_n) = \left((-1)^n\right)$

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition et forme explicite

Définition 3
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque 4

- Le nombre r s'appelle *raison* de la suite.
- La raison ne dépend pas de n ! Ainsi, si (u_n) est définie par la relation $u_{n+1} = u_n + 2n$ alors (u_n) n'est PAS arithmétique.
- Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est constante.

Proposition 5
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$$

De manière plus générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

avec $p=0$

$$\forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r$$

Démonstration : Fixons $p \in \mathbb{N}$, et notons $\mathcal{P}(n)$: " $u_n = u_p + (n-p)r$ " et démontrons $\mathcal{P}(n)$ par récurrence pour $n \geq p$.

initialisat° : Pour $n=p$, $u_p + (p-p)\times r = u_p$: $\mathcal{P}(p)$ est vraie

hérédité : Si $\underbrace{u_n = u_p + (n-p)r}_{HR}$ pour un certain $n \geq p$, alors

$u_{n+1} = u_n + r$ (déf de la suite (u_n) arithm.)

$= u_p + (n-p)r + r$ (HR)

$= u_p + (n+1-p)r$ cqfd

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 5$. Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $v_1 = 7$. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de v_n en fonction de n.

1) $u_n = u_0 + n \times 2 = 5 + 2n$

2) $v_n = \cancel{v_0 + n \times (-4)} = v_1 + (n-1) \times (-4) = 7 - 4(n-1) = 11 - 4n$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
   Ceci assure que la suite (u_n) est correctement définie et qu'on peut également définir la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
2. Montrer que (v_n) est arithmétique.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

1) n.b : pb éventuel $2u_n + 1 \neq 0$? càd $u_n \neq -1/2$? Pour voir que $u_n \neq -\frac{1}{2}$, l'exo propose de montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. Faisons-le par récurrence :

(I) : pour $n = 0$, $u_0 = 5 > 0$ OK

(H) : Si $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors : $2u_n + 1 > 0$ (car $2u_n + 1 > 1 > 0$)

donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n+1} > 0$ (en tant que quo^2 de quantités positives)

Ainsi par réc, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{u_n}{2u_n+1}} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + \dfrac{1}{u_n} = 2 + v_n$

donc (v_n) est arithm. de raison 2

3) Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times 2 = \dfrac{1}{u_0} + 2n = \dfrac{1}{5} + 2n$

donc $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{5} + 2n$ donc $u_n = \dfrac{1}{\frac{1}{5} + 2n} = \dfrac{5}{1 + 10n}$

1.2 Propriétés

Proposition 6
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.

Démonstration :

Proposition 7
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{u_0+u_1+u_2+\dots+u_n} = (n+1) \times \left(u_0 + \frac{nr}{2}\right).$$

Remarque 8
Cette formule n'est pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver.

Démonstration :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0 + kr) = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k$$

$$= u_0 \times (n-0+1) + r\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n+1) \times \left(u_0 + \frac{nr}{2}\right)$$

Exercice 3
Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $u_0 = 3$. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n et en déduire $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

$u_n = u_0 + n(-1) = 3 - n$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 3 - k = \sum_{k=0}^{n} 3 - \sum_{k=0}^{n} k = 3(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(6-n)}{2}$$

2 Suites géométriques

2.1 Définition et forme explicite

Définition 9
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique lorsqu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$.

Remarque 10
- Le nombre q s'appelle *raison* de la suite.
- La raison ne dépend pas de n ! Ainsi, si (u_n) est définie par la relation $u_{n+1} = u_n \times 2n$ alors (u_n) n'est PAS géométrique.
- Une suite (u_n) ne s'annulant pas est géométrique si et seulement si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est constante.

Proposition 11
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$$

De manière plus générale, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall n \geq p,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Démonstration : Fixons $p \in \mathbb{N}$ et notons $P(n)$: " $u_n = u_p q^{n-p}$ ". On prouve $P(n)$ par réc pour $n \geq p$

(I) pour $n = p$: $u_p q^{p-p} = u_p q^0 = u_p \times 1 = u_p$ ✓

(H) Si $\underline{u_n = u_p q^{n-p}}$ HR pour un certain $n \geq p$ alors

$u_{n+1} = u_n \times q$ (car (u_n) est géom.)

$= u_p q^{n-p} \times q$ (HR)

$= u_p q^{n+1-p}$ cqfd.

Exercice 4

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 5$. Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite géométrique de raison -4 et de premier terme $v_1 = 7$. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de v_n en fonction de n.

1) $u_n = u_0 \times 2^n = 5 \times 2^n \neq 10^n$

2) $v_n = v_1 \times (-4)^{n-1} = 7 \times (-4)^{n-1} \neq -7 \times 4^{n-1}$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.
On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \underline{v_n = u_n + 1}$.

1. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$

Donc (v_n) est géom. de raison 2.

2) Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = (u_0 + 1) \times 2^n = 6 \times 2^n$

donc $u_n + 1 = 6 \times 2^n$ donc $u_n = 6 \times 2^n - 1$

2.2 Propriétés

Proposition 12
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

1. Si $q \leq -1$, alors (u_n) n'a pas de limite.
2. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. Si $q = 1$, alors (u_n) est constante.
4. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } u_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } u_0 < 0 \end{cases}$

Démonstration :

Proposition 13
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Remarque 14
Cette formule n'est pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver.

Démonstration :

Exercice 6
Soit (u_n) la suite géométrique de raison -1 et de premier terme $u_0 = 3$. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n et en déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

3 Suites arithmético-géométriques

Définition 15
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmético-géométrique lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Remarque 16
- Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 5$ est arithmético-géométrique.
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n - 1}{2} = \dfrac{3}{2}v_n - \dfrac{1}{2}$ est aussi A-G.
- Les nombres a et b apparaissant dans la définition doivent être des constantes. Par exemple, la suite (w_n) définie par la relation de récurrence $w_{n+1} = 2w_n + n^2$ n'est PAS arithmético-géométrique.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le nombre a apparaissant dans la définition d'une suite arithmético-géométrique ($u_{n+1} = au_n + b$) est différent de 1. En effet, si $a = 1$ alors on est en fait face à une suite arithmétique

Proposition 17
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmético-géométrique définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 1$.
Si ℓ est la solution de l'équation $\ell = a\ell + b$, alors la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a.

Démonstration :
rqe : Comme $a \neq 1$, $\ell = a\ell + b \iff (a-1)\ell = -b \iff \ell = \dfrac{-b}{a-1}$ il y a bien une solu$^{\text{e}}$ ℓ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$ (déf de (v_n))

$= au_n + b - \ell$ (déf de (u_n))

$= a(v_n + \ell) + b - \ell$ (car $u_n = v_n + \ell$ car $v_n = u_n - \ell$)

$= av_n + \underbrace{a\ell + b - \ell}_{=0}$ car $a\ell + b = \ell$ (déf de ℓ)

$= av_n$ cqfd.

Remarque 18
Le nombre ℓ tel que $\ell = a\ell + b$ est appelé *point fixe* de la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$. C'est le nombre tel que : si $u_0 = \ell$ alors la suite (u_n) est constante à ℓ.

Méthode pour obtenir l'expression d'une suite arithmético-géométrique :
Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est donnée par la relation $\underbrace{u_{n+1}}_{\ell} = a\underbrace{u_n}_{\ell} + b$ avec $a \neq 1$.

1. Résoudre l'équation $\ell = a\ell + b$.
2. Poser $(v_n) = (u_n - \ell)$.
3. Vérifier que (v_n) est géométrique de raison a, c'est-à-dire que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dots\dots\dots\dots = a \times v_n$ n.b : éliminez u_n, en utilisant que $u_n = v_n + \ell$

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times a^n$ avec $v_0 = u_0 - \ell$.
5. Revenir à l'expression de u_n via : $u_n = v_n + \ell$.

Exercice 7
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

1. $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 4$.
2. $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{3}$
3. $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = -u_n - 2$

1) On résout, pour $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = 3\ell - 4 \iff 2\ell = 4 \iff \ell = 2$.
On définit la suite $(v_n) = (u_n - 2)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: on a
$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 3^n = (u_0 - 2) \times 3^n = (5-2) \times 3^n = 3^{n+1}$
donc $u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2$

2) On résout, pr $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = \dfrac{2\ell+1}{3} \iff \ell = 1$
On pose $(v_n) = (u_n - 1)$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:
$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \dfrac{2u_n + 1}{3} - 1 = \dfrac{2u_n - 2}{3} = \dfrac{2}{3}(u_n - 1) = \dfrac{2}{3} v_n$
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = (u_0 - 1) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
donc $u_n = v_n + 1 = 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1$

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

4.1 Définition

Définition 19
Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Remarque 20
Pour a, b fixés, la suite (u_n) est entièrement déterminée par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1. On dira donc par exemple, pour donner une telle suite : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = -2,\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n. \end{cases}$$

Exemple 1
La suite de Fibonacci $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ définie par $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Pour démontrer des résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on utilise naturellement la récurrence double.

Dans toute la suite de ce paragraphe, les réels a et b sont fixés. On suppose de plus que b est différent de 0. En effet, si $b = 0$ alors, la suite (u_n) est

4.2 Caractère linéaire et solutions particulières

On cherche à "résoudre" la relation de récurrence, c'est-à-dire à connaître l'expression des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant l'équation

$$(E) \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Faisons une première remarque sur l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ solutions de (E).

Proposition 21 (principe de superposition)
Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites satisfaisant l'équation (E) et soient λ et μ deux réels. Alors la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ vérifie aussi l'équation (E).

Démonstration :

Poursuivons en recherchant les suites *géométriques*, solutions de (E). Soit $q \in \mathbb{R}$; pour que la suite (q^n) soit solution de E il faut et il suffit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n.$$

En simplifiant [1] par q^n, on voit que cela revient à demander que :
Les solutions q de cette équation polynomiale ont donc une importance particulière.

Définition 22
On appelle polynôme caractéristique de l'équation (E) le polynôme $P(X) = X^2 - aX - b$.

Lemme 23
Soit $q \in \mathbb{R}$ une racine du polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - aX - b$. Alors,

1. la suite géométrique $(q^n)_{n\geq 0}$ satisfait (E),
2. si de plus le discriminant de P est nul, alors la suite $(nq^n)_{n\geq 0}$ satisfait aussi (E).

Démonstration :

Remarque 24
Le lemme donne des suites (u_n), (v_n) solutions de (E). En appliquant le principe de superposition, on peut en construire d'autres : les $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\geq 0}$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques.

1. il faut ici supposer que $q \neq 0$, mais si $q = 0$ alors la suite (q^n) est la suite nulle, qui est solution de (E)

4.3 Expression de u_n en fonction de n

Proposition 25
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par

$$u_0,\ u_1 \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Soit $P(X) = X^2 - aX - b$ son polynôme caractéristique et soit $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de ce polynôme.

1. Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines distinctes $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ et il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$,
2. Si $\Delta = 0$, alors P admet une seule racine $q \in \mathbb{R}$ et il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda q^n + \mu n q^n$,
3. Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; notons $r = |z_1|$ et $\theta = \arg(z_1)$ (c'est-à-dire que $z_1 = re^{i\theta}$) avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \Big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\Big) r^n$.

Remarque 26
Attention à l'ordre des quantificateurs ! Les conclusions sont bien de la forme :

$$\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ :\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dots$$

et non

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, \lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R} \ :\ u_n = \dots$$

Démonstration :

4.4 Exemples

Exercice 8
Déterminer le terme général des suites suivantes :

1. La suite de Fibonacci (φ_n) définie par $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$.
2. La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{-5u_{n+1} + 3u_n}{2}$.
3. La suite (v_n) définie par $v_0 = 4,\ v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} - \dfrac{1}{4}v_n$.
4. *(cas $\Delta < 0$)* : la suite (u_n) définie par $u_0 = 3,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
5. *(cas $\Delta < 0$)* : la suite (v_n) définie par $v_0 = 5,\ v_1 = -4\sqrt{3}$ et
   $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = -2\sqrt{3}\, v_{n+1} - 4v_n$.