BCPST 1B 2023-2024 **Interro non notée (sujet A) :** **/20 pts**

Question 1 (/4 pts)**.**
Exprimer en fonction de $\cos(a),\ \cos(b),\ \sin(a),\ \sin(b)$:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-\frac{\pi}{2}) = -\cos(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$

Question 2 (/6 pts)**.**
Calculer pour $n \in \mathbb{N}$:

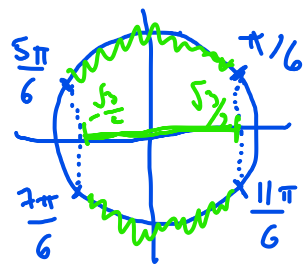
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^n 3^{-k}\\ &= 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k\\ &= 3^n \times \frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\\ &= 3^n \times \frac{1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3}}\\ &= 3^{n+1} \times \left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)\\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1}\end{aligned}$$

Question 3 (/5 pts)**.**
Résoudre sur $[0, 2\pi[$: $4\cos^2(x) - 3 \leq 0$.

Pour $x \in [0, 2\pi[$ on a :

$$\begin{aligned}4\cos^2(x) - 3 \leq 0 &\iff \cos^2(x) \leq \frac{3}{4}\\ &\iff -\sqrt{\frac{3}{4}} \leq \cos(x) \leq \sqrt{\frac{3}{4}}\\ &\iff -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$.



Question 4 (/5 pts)**.**
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1$.
Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

On résout pour $\ell \in \mathbb{R}$: $\ell = 3\ell - 1 \iff \ell = \dfrac{1}{2}$. On définit alors la suite $(v_n) = (u_n - \frac{1}{2})$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = 3u_n - 1 - \frac{1}{2} = 3u_n - \frac{3}{2} = 3(u_n - \frac{1}{2}) = 3v_n.$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 3^n = \frac{3^{n+1}}{2}$ et donc $u_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{3^{n+1}+1}{2}$.

BCPST 1B **Interro non notée (sujet B) :** **/20 pts**
2023-2024

Question 1 (/4 pts).
Exprimer en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$, $\sin(b)$:

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-\frac{\pi}{2}) = \sin(a)$$

$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$

Question 2 (/6 pts).
Calculer pour $n \in \mathbb{N}$:

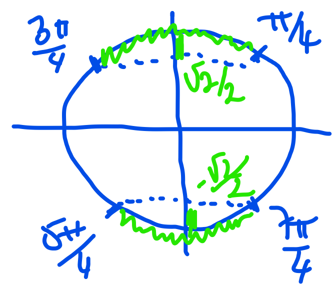
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 3^k 2^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n+1} 3^k 2^{n-1} 2^{-k} \\
&= 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&= 2^{n-1} \times \frac{1-(\frac{3}{2})^{n+2}}{1-\frac{3}{2}} \\
&= 2^{n-1} \times \frac{1-\frac{3^{n+2}}{2^{n+2}}}{-\frac{1}{2}} \\
&= -2^n \times \left(1 - \frac{3^{n+2}}{2^{n+2}}\right) \\
&= -2^n + \frac{3^{n+2}}{2^2} \\
&= \frac{3^{n+2}}{4} - 2^n
\end{aligned}$$

Question 3 (/5 pts).
Résoudre sur $[0, 2\pi[$: $2\sin^2(x) - 1 \geq 0$.

Pour $x \in [0, 2\pi[$ on a :

$$\begin{aligned}
2\sin^2(x) - 1 \geq 0 &\iff \sin^2(x) \geq \frac{1}{2} \\
&\iff \sin(x) \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad \sin(x) \leq -\sqrt{\frac{1}{2}} \\
&\iff \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.



Question 4 (/5 pts).
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -v_n - 4$.
Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n.

On résout pour $\ell \in \mathbb{R}$: $\ell = -\ell - 4 \iff \ell = -2$. On définit alors la suite $(w_n) = (v_n + 2)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 2 = -v_n - 4 + 2 = -v_n - 2 = -w_n.$$

Ainsi (w_n) est géométrique de raison -1 et de premier terme $w_0 = v_0 + 2 = -3 + 2 = -1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$w_n = w_0 \times (-1)^n = (-1)^{n+1}$ et donc $v_n = w_n - 2 = (-1)^{n+1} - 2$.