TD3 :

exo 5 :

1) On a : $u_1 = u_0 + 3^1 = 1+3$

$u_2 = u_1 + 3^2 = 1+3+3^2$

$u_3 = u_2 + 3^3 = 1+3+3^2+3^3$

2) Il semble que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$u_n = 1+3+3^2+\dots+3^n = \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

Démontrons-le par récurrence.

Tout d'abord, pour $n=0$, $\frac{3^{0+1}-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons ensuite que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

alors $u_{n+1} = u_n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1} = 3^{n+1}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}$

$= \frac{3^{n+1} \times 3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3^{n+2}-1}{2}$ ce qu'il fallait démontrer

Finalement, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$