
Mathématiques - mercredi 11 octobre 2023
Devoir n°2 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Les qualités de rédaction (clarté des raisonnements, lisibilité, orthographe...) seront sensiblement prises en considération dans l'évaluation des copies.**
- **Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et continuez l'exercice en effectuant les changements que vous jugez nécessaires.**
- **Ce sujet est constitué de 7 exercices indépendants.**
- **On ne rendra pas le sujet avec la copie.**
  Les élèves qui rendront le sujet avec la copie auront un point de moins.

Exercice 1 (Informatique)**.**

1. Écrire une fonction Python `f` prenant en argument un nombre réel x et renvoyant :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x} & \text{si } x < -2 \\ x+3 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
2. Écrire une fonction `somme` prenant en argument un entier n et renvoyant $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} \frac{2k+1}{k+2}$.
3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Écrire une fonction Python `suite1` prenant en argument un entier n et renvoyant u_n.
4. Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{n + v_n}{n+1}$. Écrire une fonction Python `suite2` prenant en argument un entier n et renvoyant v_n.

Exercice 2 (Questions de cours)**.**

1. Quelle est la définition de : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique ?
2. Quelle est la contraposée de : n est pair $\implies$ n^2 est pair ?
3. (a) Donner la formule exprimant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Démontrer ensuite cette formule.
4. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k} + (2k)^2}{2}$.

Exercice 3. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\tan^2(x) - \tan(x) - 2 = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\cos^2(x) \geq \dfrac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi[$.
4. $\cos(x) - \sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{n(u_n - 2)}{u_n + 3n + 1}$.
On définit également la suite (t_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n = \dfrac{n}{u_n + 1}$.
On *admet* que ces suites sont bien définies.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_{n+1} = 3t_n + 1$.
3. En déduire l'expression de t_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n^2$.

On introduit la suite $(v_n) = (u_{n+1} - u_n)$.

2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$.
3. En calculant d'une autre façon la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$, en déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. Expliquer pourquoi cette équation admet une unique solution sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *On ne demande pas de déterminer la valeur de la solution dans cette question.*

Dans la suite de l'exercice, on note a cette solution.

2. Montrer que : $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(4\theta) = 2\big(1 - 2\sin^2(\theta)\big)^2 - 1$.
4. En déduire que $\cos(4a) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.
5. En déduire la valeur de a.

Exercice 7.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le produit P_n suivant :

$$P_n = \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

c'est-à-dire que

$$P_n = \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \times \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\theta}{8}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right).$$

Déterminer une expression plus simple de P_n.
On pourra commencer par étudier les cas $n = 1$ et $n = 2$.