DS 2 : Corrigé

exercice 1

1)
```
def f(x):
    if x<-2:
        return 1/(2*x)
    elif x<1:
        return x+3
    else:
        return x**2
```

2)
```
def somme(n):
    S=0
    for k in range(4,n+1):
        S=S+(2*k+1)/(k+2)
    return S
```

3)
```
def suite1(n):
    u=3
    for k in range(0,n):
        u=(u+1)**(1/2)
    return u
```

4)
```
def suite2(n):
    v=4
    for k in range(0,n):
        v=(k+v)/(k+1)
    return v
```

exercice 2

1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique lorsque : $\boxed{\exists r\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+r}$

2) Il s'agit de : $\boxed{n^2 \text{ est impair} \Longrightarrow n \text{ est impair}}$

3) a) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$.

b) Démontrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

D'abord, pour $n=1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1\times(1+1)}{2}=1$ donc la formule est vraie au rang 1.

Ensuite supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi on a bien prouvé que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

4) On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}+(2k)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} 4^k + 4\sum_{k=0}^{n} k^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1-4^{n+1}}{1-4} + 4\,\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$

$= \boxed{\dfrac{4^{n+1}-1+2n(n+1)(2n+1)}{6}}$

exercice 3 :

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

2) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ on a :

$$\tan^2(x) - \tan(x) - 2 = 0 \iff \begin{cases} y = \tan(x) \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Le discriminant de $X^2 - X - 2$ est $(-1)^2 - 4 \times (-2) = 9$ donc ses racines sont $\frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ et $\frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$. Ainsi :

$$(*) \iff \begin{cases} y = \tan(x) \\ y = 2 \text{ ou } y = -1 \end{cases} \iff \left(\tan(x) = 2 \text{ ou } \tan(x) = -1\right)$$

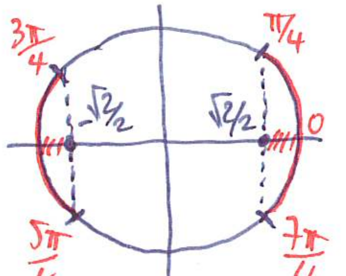
$$\iff \left(\tan(x) = \tan(\arctan(2)) \text{ ou } \tan(x) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \arctan(2) + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\arctan(2) + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

3) Pour $x \in [0, 2\pi[$ on a :

$$\cos^2(x) \geq \frac{1}{2} \iff \left(\cos(x) \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } \cos(x) \leq -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$



$$\iff \left(\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi$$

Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[}.$$

4) Pour $x \in \mathbb{R}$, écrivons $\cos(x)-\sin(x)$ sous la forme $r\cos(x+\varphi)$.
D'après le cours, il faut choisir $r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ et φ solution de
$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = -\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
donc $\varphi = \frac{\pi}{4}$ convient.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)-\sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Dès lors, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}
\cos(x)-\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_4 = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.

exercice 4 :

1) On a $u_2 = \frac{1\times(u_1-2)}{u_1+3\times1+1} = \frac{1\times(3-2)}{3+3\times1+1} = \boxed{\frac{1}{7}}$

et $u_3 = \frac{2\times(u_2-2)}{u_2+3\times2+1} = \frac{2\times\left(\frac{1}{7}-2\right)}{\frac{1}{7}+7} = \frac{2\times(1-14)}{1+7\times7} = \boxed{-\frac{13}{25}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$t_{n+1} = \frac{n+1}{u_{n+1}+1} = \frac{n+1}{\frac{n(u_n-2)}{u_n+3n+1}+1} = \frac{(n+1)(u_n+3n+1)}{n(u_n-2)+u_n+3n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(u_n+3n+1)}{nu_n+u_n-2n+3n+1} = \frac{(n+1)(u_n+3n+1)}{(n+1)u_n+n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(u_n+3n+1)}{(n+1)(u_n+1)} = \frac{u_n+3n+1}{u_n+1} = \frac{3n}{u_n+1} + \frac{u_n+1}{u_n+1} = 3t_n+1$$

3) On résout pour $l \in \mathbb{R}$,

$$l = 3l+1 \iff 2l = -1 \iff l = -\frac{1}{2}$$

On définit donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(t_n + \frac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = t_{n+1} + \frac{1}{2} = 3t_n + 1 + \frac{1}{2} = 3t_n + \frac{3}{2} = 3\left(t_n + \frac{1}{2}\right) = 3v_n$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_1 = t_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 \times 3^{n-1} = \frac{3}{4} \times 3^{n-1} = \frac{3^n}{4}$$

et donc $t_n = v_n - \frac{1}{2} = \frac{3^n}{4} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3^n-2}{4}}$

Or $t_n = \frac{n}{u_n+1}$ donc $u_n + 1 = \frac{n}{t_n}$ donc

$$u_n = \frac{n}{t_n} - 1 = \frac{n}{\frac{3^n-2}{4}} - 1 = \boxed{\frac{4n}{3^n-2} - 1}$$

exercice 5 :

1) Tout d'abord, $u_0 = 0 \geqslant 0^2$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Ensuite, supposons que $u_n \geqslant n^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n+3 \geqslant n^2 + 2n+3.$$

Or $n^2 + 2n + 3 = (n^2 + 2n + 1) + 2 = (n+1)^2 + 2 \geqslant (n+1)^2$

Donc $u_{n+1} \geqslant (n+1)^2$ ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi on a bien prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n^2$

2) Tout d'abord, pour $n=1$, $\sum_{k=0}^{1-1} v_k = v_0 = u_1 - u_0$ donc la formule est vraie au rang $n=1$.

Ensuite, supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $\sum_{k=0}^{n} v_k = u_{n+1} - u_0$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right) + v_n = u_n - u_0 + u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_0$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi on a bien prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$.

3) D'après la définition de la suite (u_n) on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = u_{k+1} - u_k = 2k+3$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme $u_0 = 0$,

$$u_n = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+3) = 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 3$$

$$= 2\,\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + 3(n-1+1)$$

$$= n(n-1) + 3n = \boxed{n(n+2)}$$

Exercice 6

1. On a $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \in [-1,1]$. En effet, $\sqrt{5} \leq 5$ donc $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \leq \dfrac{5-1}{4} = 1$, et $\sqrt{5} > 1$ donc $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} > 0 \geq -1$. Ainsi par définition de l'arcsinus il existe une unique solution $a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ à l'équation $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$: c'est $a = \arcsin(\frac{\sqrt{5}-1}{4})$.
2. La fonction sinus est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et négative sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$; ainsi le fait que $\frac{\sqrt{5}-1}{4} > 0$ implique que $a > 0$. De plus comme $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4} \neq 1$ on a $a \neq \frac{\pi}{2}$. Finalement on a bien $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Exprimons $\cos(4a)$ en fonction de $\sin(a)$:

$$\begin{aligned}\cos(4a) &= \cos(2 \times (2a)) = 2\cos^2(2a) - 1 \\ &= 2[1 - 2\sin^2(a)]^2 - 1\end{aligned}$$

Or $\sin^2(a) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \dfrac{5+1-2\sqrt{5}}{16} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$. Donc :

$$\begin{aligned}\cos(4a) &= 2\left[1 - 2\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right]^2 - 1 \\ &= 2\left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right]^2 - 1 \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin(a) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\end{aligned}$$

4. Dès lors $\cos(4a) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\begin{cases} 4a = \dfrac{\pi}{2} - a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4a = a - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} (*) : a = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ (**) : a = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

On cherche alors les valeurs de k qui conviennent pour que $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
Dans le cas $(**)$: prendre $k \leq 0$ conduit à des valeurs de a négatives, et prendre $k \geq 1$ conduit à des valeurs de a supérieures à $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Ces valeurs étant exclues, on ne peut pas être dans le cas $(**)$.
Dans le cas $(*)$: prendre $k \leq -1$ conduit à des valeurs de a négatives (car $\frac{\pi}{10} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$), et prendre $k \geq 1$ conduit à des valeurs de a supérieures à $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$. Il reste donc seulement la possibilité $k = 0$, et finalement on trouve $\boxed{a = \frac{\pi}{10}}$.

7/8

Exercice 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On remarque que pour tout $n \geq 2$,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(2 \times \frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) &= \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \times \prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \times \prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on vient de démontrer que pour tout $n \geq 2$, $P_n = \dfrac{1}{2}P_{n-1}$.

Par conséquent la suite $(P_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et son premier terme est

$$P_1 = \sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{1}{2}\sin(\theta)$$

Finalement pour tout $n \geq 1$,

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} P_1 = \boxed{\frac{1}{2^n}\sin(\theta)}$$

8/8