TD3 :

exo 12 :

1) On a $u_1 = 1 + \sum_{k=0}^{0} u_k = 1 + u_0 = 2$

$$u_2 = 1 + \sum_{k=0}^{1} u_k = 1 + u_0 + u_1 = 4$$

$$u_3 = 1 + \sum_{k=0}^{2} u_k = 1 + u_0 + u_1 + u_2 = 8$$

$$u_4 = 1 + \sum_{k=0}^{3} u_k = 1 + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 16$$

2) Il semble que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$

Démontrons-le par récurrence forte.

Tout d'abord, pour $n=0$ on a bien $2^0 = 1 = u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Supposons ensuite que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la propriété soit vraie pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ c'est-à-dire que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_k = 2^k$

Alors $u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 1 - (1 - 2^{n+1}) = 2^{n+1}$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.