

Exercice 8

- Déterminer tous les nombres complexes z tels que $\frac{z + 2i}{z - 4i} \in \mathbb{R}$.
- On suppose que $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifie $|z| = 1$. Montrer que $\frac{z + 1}{z - 1}$ est imaginaire pur.
- Pour $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrer que $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \iff (|u| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R})$.

Exercice 9

Montrer que le produit de deux nombres qui sont sommes de deux carrés d'entiers l'est aussi.

Exercice 10

- Si $\omega \in \mathbb{C}$, rappeler l'expression de $|\omega|^2$ en fonction de ω et de son conjugué.
- Démontrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

- Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes fixés. Faire un dessin et y placer :
 - un point M d'affixe z (choisir z quelconque!),
 - un point M' d'affixe z' (choisir z' quelconque!),
 - un point A d'affixe $z + z'$,
 - un point B d'affixe $z - z'$.
- À quelle identité géométrique correspond l'égalité de la question 2 ?

Exercice 11

- Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Exprimez $\operatorname{Re}(z - 1)$ et $\operatorname{Im}(z - 1)$ en fonction de x et y .
 - Exprimez $\operatorname{Re}(z - i)$ et $\operatorname{Im}(z - i)$ en fonction de x et y .
 - En déduire les expressions de $|z - 1|$ et $|z - i|$.
- Résoudre l'équation $|z - i| = |z - 1|$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
- Placer un point A d'affixe 1 et un point B d'affixe i sur un dessin.
 - Si M est un point d'affixe z , à quoi correspondent géométriquement les quantités $|z - 1|$ et $|z - i|$?
 - Retrouver géométriquement le résultat de la question 2.

Exercice 12

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On proposera deux solutions : une approche algébrique (c'est-à-dire par le calcul) et une approche géométrique.

- $|z + 1 + i| = |z + 1 - i|$
- $|z - i| = |z - 2 - i| = \sqrt{2}$
- $|z - \bar{z}| \leq 1$
- $|z + 1| > |z - i|$