Devoir maison n°1
À rendre le lundi 6 novembre 2023
Vous pouvez rendre une copie pour deux élèves.

Exercice 1. Montrer que :

$$\ln(-2x^2+3x+2) - \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right) = \ln(2x^2+3x+1)$$

et préciser pour quels réels x cette égalité est valable.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{C}$:

$$(1+i)z - (2-i)\overline{z} = -1-i$$

on cherchera z sous forme algébrique.

Exercice 3. Soient $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Écrire les nombres complexes $z_1,\ z_2$ et $z_1 z_2$ sous forme exponentielle.
2. Écrire $z_1 z_2$ sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. En utilisant encore z_1 et z_2, déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. La dynamique des populations consiste à étudier l'évolution du nombre d'individus d'une population au cours du temps. Le cadre dit discret consiste à supposer que le temps est un entier positif n (correspondant par exemple à un nombre de jours ou d'années). L'évolution d'une population X est alors représentée par une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_n est le nombre d'individus au temps n.

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'évolution de deux populations : une colonie de Drosophilia suzukii, notée X, et une colonie de perce-oreilles, notée Y. On dispose donc de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant aux évolutions de ces deux populations.

On cherche tout particulièrement à déterminer si la population X peut ou non survivre en présence de la population Y. On dira que la population X ne peut pas survivre lorsqu'on est face à un des deux cas suivants :

- la population s'éteint "en temps long" c'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, ou
- la population s'éteint "en temps fini" c'est-à-dire : $\exists\, N \in \mathbb{N}\ :\ x_N \leq 0$.

1. Dans un premier temps, on suppose que les populations X et Y n'interagissent pas, et que ces espèces ont un taux de reproduction identique $a > 0$. Cela signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} &= a x_n \\ y_{n+1} &= a y_n \end{cases}$$

   (a) Déterminer l'expression de x_n et de y_n en fonction de x_0, y_0, a et n.
   (b) À quelle condition la population X survit-elle lorsque $n \to +\infty$?

Dans la suite de l'exercice, on suppose désormais que les perce-oreilles (Y) attaquent les Drosophilia suzukii (X) : la population Y est un prédateur et la population X est sa proie. À chaque temps n, une partie des individus de la population X est tuée par la population Y. Plus précisément, chaque perce-oreille élimine un nombre $b > 0$ de Drosophilia suzukii. Ainsi, à l'étape n, comme il y a y_n perce-oreilles, ce sont by_n Drosophilia suzukii qui sont éliminées. Cela signifie donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & ax_n - by_n \\ y_{n+1} & = & ay_n \end{array} \right.$$

2. (a) Écrire une fonction Python `popu` prenant en arguments x_0, y_0, a, b et n et renvoyant x_n et y_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = 2ax_{n+1} - a^2 x_n$. *Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.*
   (c) En déduire l'expression de x_n en fonction de a, b, x_0, y_0 et n.
   (d) On suppose que $a > 1$ et on rappelle que $b > 0$. Montrer que la population X disparaît au bout d'un temps fini N qu'on exprimera en fonction de a, b, x_0 et y_0.

Pour finir, on suppose désormais que les proies (X) se reproduisent plus rapidement que les prédateurs (Y). On note a' et a les taux de reproduction respectifs des populations X et Y, et on suppose que $a' > a > 1$. Chaque individu de Y continue de tuer $b > 0$ individus de X à chaque temps n, et les individus de X sont toujours inoffensifs pour ceux de Y.

3. (a) Écrire les expressions de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n, y_n, a, a' et b correspondant à cette situation.
   (b) En suivant la même démarche qu'en 2.(b), montrer que (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et en déduire l'expression de x_n en fonction de a, a', b, x_0, y_0 et n.
   (c) Montrer alors qu'il existe une valeur seuil x_0^*, dont on donnera l'expression en fonction des autres paramètres, telle que :
      - si $x_0 > x_0^*$ alors la population X survit, et
      - si $x_0 < x_0^*$ alors la population X disparaît au bout d'un temps fini N qu'on explicitera.