TD 4

ex 9 :

Il s'agit de démontrer que :

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \exists p,q \in \mathbb{Z} : (a^2+b^2)(c^2+d^2) = p^2+q^2.$$

Prenons donc $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ et considérons les nombres complexes $z = a+ib$ et $z' = c+id$. Alors on remarque que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = |z|^2 \times |z'|^2 = |zz'|^2$$

Or $zz' = (a+ib)(c+id) = ac-bd + i(bc+ad)$

donc $|zz'|^2 = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$

Comme $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, on a $p = ac-bd \in \mathbb{Z}$ et $q = bc+ad \in \mathbb{Z}$

et on a bien montré que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = p^2+q^2$.

Les esprits sceptiques pourront développer à la main $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ et $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ pour se convaincre que ces deux quantités sont bien égales. Cette égalité porte le nom d'identité de Brahmagupta ou identité de Diophante.