<u>DM 1</u> Corrigé

Exercice 1

Les racines de $-2X^2+3X+2$ sont $\dfrac{-3+\sqrt{3^2-4\times 2\times(-2)}}{-2\times 2} = \dfrac{-3+\sqrt{25}}{-4} = -\frac{1}{2}$

et $\dfrac{-3-\sqrt{25}}{-4} = 2$ donc $-2X^2+3X+2 = -2\left(X-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(X-2) = (2X+1)(2-X)$.

Les racines de $2X^2+3X+1$ sont $\dfrac{-3+\sqrt{3^2-4\times 2}}{2\times 2} = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{4} = -\frac{1}{2}$ et

$\dfrac{-3-\sqrt{1}}{4} = -1$ donc $2X^2+3X+1 = 2\left(X-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(X-(-1)) = (2X+1)(X+1)$.

Dès lors pour tout réel x tel que ces quantités existent :

$$
\begin{aligned}
\ln(-2x^2+3x+2) - \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right) &= \ln((2x+1)(2-x)) - \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(2x+1)(2-x)}{\frac{2-x}{x+1}}\right)\\
&= \ln((2x+1)(x+1))\\
&= \ln(2x^2+3x+1).
\end{aligned}
$$

Pour pouvoir écrire ces égalités, il faut et il suffit que :

$-2x^2+3x+2>0$ et $\dfrac{2-x}{x+1}>0$ (et alors, automatiquement,

le quotient : $\dfrac{-2x^2+3x+2}{\frac{2-x}{x+1}} = 2x^2+3x+1$ est strictement positif).

Comme $-2x^2+3x+2 = (2x+1)(2-x)$, on peut dresser les tableaux de signes suivants :

$2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$; $2-x>0 \iff x<2$; $x+1>0 \iff x>-1$

x		$-\frac{1}{2}$		2	
$(2x+1)$	$-$	0	$+$		
$(2-x)$			$+$	0	$-$
$-2x^2+3x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

x		-1		2	
$2-x$			$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		
$\frac{2-x}{x+1}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

Ainsi, on a : $\begin{pmatrix} -2x^2+3x+2>0 \\ \text{et } \frac{2-x}{x+1}>0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x\in\left]-\frac{1}{2},2\right[\\ \text{et } x\in\left]-1,2\right[\end{pmatrix} \iff x\in\left]-\frac{1}{2},2\right[$

Finalement, l'égalité proposée est valable pour $x\in\left]-\frac{1}{2},2\right[$.

Exercice 2 :

Notons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$(1+i)z - (2-i)\bar{z} = -1-i \iff (1+i)(x+iy) - (2-i)(x-iy) = -1-i$$

$$\iff x + iy + ix - y - (2x - 2iy - ix - y) = -1-i$$

$$\iff -x + i(2x+3y) = -1-i$$

$$\underset{(*)}{\iff} \begin{cases} -x = -1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ 3y = -1 - 2x = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\iff z = x + iy = 1 - i$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $S = \{1-i\}$.

n.b : L'équivalence $(*)$ vient du résultat suivant du cours :

« Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a : $z = z' \iff \left(Re(z) = Re(z') \text{ et } Im(z) = Im(z')\right)$ »

Ainsi, si $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ on a :

$$a + ib = a' + ib' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

Exercice 3

1) On a $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

On a $|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2} = 2$ donc $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\pi/6}$.

Ainsi $z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\, 2e^{-i\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2) On a $z_1 z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$.

3) D'après les deux formes de $z_1 z_2$ trouvées ci-dessus, on a :

$$\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

donc $\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \times 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Identifiant parties réelle et imaginaire, on en déduit que

$\sqrt{3}+1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

et $\sqrt{3}-1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

4) Remarquons que $\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Ainsi $\frac{5\pi}{12}$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$. En effet :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}.$$

Dès lors, on calcule que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}^2-i^2} = \frac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{4}$

donc, d'après les deux formes de $\frac{z_1}{z_2}$, on a :

$$\frac{\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5i\pi/12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Identifiant parties réelle et imaginaire, on en déduit que :

$\frac{\sqrt{3}-1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

et $\frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ donc $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4 :

1) a) On reconnaît des suites géométriques donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 a^n$ et $y_n = y_0 a^n$.

b) Comme $a > 0$ et $x_0 > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ x_0 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

donc la population X survit à condition que $a \geq 1$.

2) a)
```
def popu(x0, y0, a, b, n):
    x, y = x0, y0
    for k in range(n):
        x, y = a*x - b*y, a*y
    return x, y
```

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$x_{n+2} = a x_{n+1} - b y_{n+1}$. Or $y_{n+1} = a y_n$. Donc $x_{n+2} = a x_{n+1} - a b y_n$.

Mais $x_{n+1} = a x_n - b y_n$ donc $-a b y_n = a(x_{n+1} - a x_n) = a x_{n+1} - a^2 x_n$.

Finalement,
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= a x_{n+1} - a b y_n \\ &= a x_{n+1} + a x_{n+1} - a^2 x_n \\ &= 2a x_{n+1} - a^2 x_n. \end{aligned}$$

c) Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 est $P(X) = X^2 - 2aX + a^2 = (X-a)^2$.
Il n'a qu'une seule racine (a), donc on sait que :

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \ x_n = \lambda a^n + \mu n a^n$

On détermine alors λ et μ en utilisant les valeurs de x_0 et de $x_1 = a x_0 - b y_0$:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \times a^0 + \mu \times 0 \times a^0 = \lambda \\ a x_0 - b y_0 = \lambda a + \mu a \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x_0 \\ a x_0 - b y_0 = a x_0 + \mu a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = x_0 \\ \mu a = -b y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = x_0 \\ \mu = -\frac{b}{a} y_0 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_0 a^n - \frac{b}{a} y_0 n a^n = \left(x_0 - \frac{b}{a} y_0 n\right) a^n$

d) Comme $a > 1$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $a^n > 0$ donc :

$x_n \leq 0 \iff x_0 - \frac{b}{a} y_0 n \leq 0 \iff n \geq \frac{a x_0}{b y_0}$.

Donc la population X s'éteint après le temps $N = \frac{a x_0}{b y_0}$.

3) a) Cela correspond aux relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = a' x_n - b y_n \\ y_{n+1} = a y_n \end{cases}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$x_{n+2} = a' x_{n+1} - b y_{n+1} = a' x_{n+1} - a b y_n = a' x_{n+1} + a(x_{n+1} - a' x_n)$$

$$= (a + a') x_{n+1} - a a' x_n .$$

Le polynôme caractéristique associé est

$P(X) = X^2 - (a+a')X - aa' = (X-a)(X-a')$: il a deux racines distinctes a et a' donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \lambda a^n + \mu a'^n$$

On obtient alors $\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = \lambda a + \mu a' = a' x_0 - b y_0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \mu = x_0 - \lambda \\ \lambda a + (x_0 - \lambda) a' = a' x_0 - b y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = x_0 - \lambda \\ \lambda (a - a') = -b y_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = x_0 - \lambda \\ \lambda = \dfrac{by_0}{a'-a} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = x_0 - \dfrac{by_0}{a'-a} \\ \lambda = \dfrac{by_0}{a'-a} \end{cases}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \dfrac{by_0}{a'-a} a^n + \left(x_0 - \dfrac{by_0}{a'-a}\right) a'^n$

c) Il s'agit de $x_0^* = \dfrac{by_0}{a'-a}$. En effet :

• si $x_0 > x_0^*$: alors $x_0 - \dfrac{by_0}{a'-a} > 0$ et comme $a' > 1$ et $\dfrac{by_0}{a'-a} > 0$ et $a > 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ donc la population X survit.

• si $x_0 < x_0^*$: alors, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$x_n \leq 0 \iff x_0^* a^n + (x_0 - x_0^*) a'^n \leqslant 0$$

$$\iff x_0^* - (x_0^* - x_0)\left(\frac{a'}{a}\right)^n \leq 0 \quad (\text{correct car } a^n > 0)$$

$$\iff \left(\frac{a'}{a}\right)^n \geqslant \frac{x_0^*}{x_0^* - x_0} \quad (\text{correct car } x_0^* - x_0 > 0)$$

$$\iff n \ln\left(\frac{a'}{a}\right) \geq \ln\left(\frac{x_0^*}{x_0^* - x_0}\right)$$

$$\iff n \geqslant \ln\left(\frac{x_0^*}{x_0^* - x_0}\right) \Big/ \ln\left(\frac{a'}{a}\right) \quad \left(\text{correct car } \ln\left(\frac{a'}{a}\right) > 0 \text{ car } \frac{a'}{a} > 1 \text{ car } a' > a\right)$$

Ainsi la population X s'éteint après le temps

$$N = \frac{\ln(x_0^*/(x_0^* - x_0))}{\ln(a'/a)}.$$