Exercice 1

1. Écrire les sommes et produits suivants avec des pointillés et les calculer :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=-10}^{12} k$
   (b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \sin\left(\frac{(k^2-4)\pi}{37}\right)$
2. Écrire les sommes et produits suivants avec le symbole $\sum$ ou $\prod$ et les calculer :
   (a) $1+3+5+7+\cdots+2023$
   (b) $2\times 4\times 6\times 8\times\cdots\times(2n)$

Exercice 2

Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à transformer un symbole $\sum$ ou $\prod$ en pointillés :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2k+2^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} k^2$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(3k)$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 2^{-k}$

Exercice 3

En utilisant une formule de "découpage", déterminer pour $q\in\mathbb{R}$ et $p\leq n$ deux entiers naturels la valeur de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$.

Exercice 4

Écrire avec des factorielles les nombres suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$
3. $\dfrac{n(n+1)(n+2)\times\cdots\times(3n)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\times\cdots\times(4n+1)}$

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_1=\frac{1}{2}$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=u_n\times\frac{\pi\, n^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 puis établir une conjecture sur la valeur de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 6

Calculer les sommes et produits suivants, on n'hésitera pas à utiliser des pointillés :

1. $\displaystyle\sum_{k=50}^{100} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k+1}$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \ln(k+1)$
5. $\displaystyle\sum_{k=5}^{p} \ln(k+3)$
6. $\displaystyle\prod_{k=5}^{n-1} 2\sqrt{k}\,k$
7. $2^0-2^1+2^2-2^3+2^4-\cdots+2^{2n}-2^{2n+1}$

Exercice 7

1. Écrire avec des pointillés la somme $S=\displaystyle\sum_{k=7}^{n} u_{k+3}$ puis l'écrire sous la forme $S=\displaystyle\sum_{i=?}^{?} u_i$ en complétant les points d'interrogation.
2. Écrire avec des pointillés la somme $T=\displaystyle\sum_{k=3}^{10}(u_{k+1}-u_k)$ puis la simplifier.

Exercice 8

Pour $p\in\mathbb{N}$, que vaut : $p!\times(p+1)$?
Simplifier alors les expressions suivantes :

1. $\dfrac{(n+1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}$
2. $\dfrac{(n+1)!-n!}{n}$
3. $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{n}{(n+1)!}$