TD 4 : exo 16 :

1) On écrit z sous forme trigonométrique !

$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}$

donc $z^{2023} = \left(e^{i\pi/3}\right)^{2023} = e^{i\frac{2023\pi}{3}}$

Or $2023 = 3 \times 674 + 1$ donc $\frac{2023\pi}{3} = 674\pi + \frac{\pi}{3} = (337 \times 2\pi) + \frac{\pi}{3}$

Donc $e^{i\frac{2023\pi}{3}} = e^{i(337\times 2\pi) + i\frac{\pi}{3}} = 1 \times e^{i\pi/3} = z$

Finalement $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{2023} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

2) Calculons

$$\begin{aligned}
z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 &= \sqrt{2-\sqrt{3}}^2 + 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}i - \sqrt{2+\sqrt{3}}^2 \\
&= 2-\sqrt{3} + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}i - (2+\sqrt{3}) \\
&= -2\sqrt{3} + 2\sqrt{4-3}\,i \\
&= -2\sqrt{3} + 2i \\
&= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
&= 4e^{5i\pi/6}
\end{aligned}$$

Dès lors, si $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors on a :

$z^2 = 4e^{5i\pi/6}$ donc $r^2 e^{2i\theta} = 4e^{5i\pi/6}$ donc $r^2 = 4$ et $\exists k \in \mathbb{Z} : 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

donc $r = 2$ et $\exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2e^{\frac{5i\pi}{12} + ik\pi}$ c'est-à-dire que

$z = 2e^{5i\pi/12} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ou $z = -2e^{-5i\pi/12} = -2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Or, comme $0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$, et

d'après l'écriture $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}$, on a $Re(z) > 0$ et

$Im(z) > 0$. C'est donc que $z = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2e^{5i\pi/12}$

(et au passage on a prouvé que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}}$).