Ce DS 2 est à nouveau très partagé entre les élèves ayant une connaissance claire des techniques vues en cours et les autres. Par ailleurs, de plus en plus de questions seront désormais évaluées de manière binaire : soit le raisonnement est complet et correct et la question rapporte des points, soit le raisonnement n'est pas clair et la question ne rapporte *aucun* point. Il faut donc privilégier la qualité à la quantité. Acceptez de passer du temps sur un exercice pour le faire correctement, passer en vitesse sur toutes les questions ne rapporte pas de point.

Remarques et abréviations particulières :

- Le principe de récurrence doit souvent être revu, cf exercices au dos de cette page.
- $\boxed{\text{FE}}$: finissez les exercices que vous commencez. Ce n'est pas parce que vous n'avez pas réussi la question 2 que vous ne pouvez pas faire la question 3. Par exemple, dans l'exercice 4, il n'était pas forcément facile d'arriver à la relation $t_{n+1} = 3t_n + 1$, mais comme celle-ci était donnée par l'énoncé, rien ne vous empêchait de continuer l'exercice en l'admettant !
- Pour les boucles for en Python, le suivi des variables n'a pas besoin d'apparaître sur la copie : utilisez un brouillon.
- Il y a encore trop de confusions entre $\Longleftrightarrow$ et $=$. Il y a également encore des copies qui ne savent pas résoudre $x^2 \geq r$... Je renvoie aux feuilles de remarques des DS précédents.
- Remarque de vocabulaire : la relation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$ ne relève pas de la "linéarité de la somme", il s'agit de la définition du symbole $\sum$. La linéarité de la somme, c'est ce qu'on emploie lorsqu'on écrit que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k + b_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.
- On lit souvent l'affirmation suivante :

  $$\text{On a } t_n = \frac{n}{u_n + 1} \text{ donc } t_{n+1} = \frac{n+1}{u_{n+1} + 1}.$$

  Cette implication est formellement incorrecte. Ce n'est pas parce qu'une égalité est valable à un rang n qu'elle est encore au rang $n + 1$. En fait, ici c'était simplement la définition de la suite (t_n) qui imposait cette relation sur t_{n+1}. Il faudrait donc écrire :

  $$\text{Comme } \forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{n}{u_n + 1} \text{ alors on aussi } \forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = \frac{n+1}{u_{n+1} + 1}.$$

- A partir du DS 3, l'orthographe sera fortement pénalisée. Soyez conscients qu'écrire "on a bien démontrer la relation" vous décrédibilise fortement auprès des correcteurs.

Exercices supplémentaires : sommes, produits et récurrences

Exercice 1

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln\left(\dfrac{e^{u_n}+1}{2}\right)$.

1. Justifier que (u_n) est correctement définie.
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = e^{u_n} - 1$.

3. Montrer que (t_n) est géométrique et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2

Pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $p \leq n$ deux entiers, on propose de démontrer à nouveau la formule :

$$(*)\ :\ \sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

1. En écrivant $k = p + i$, effectuer un changement d'indice conduisant à la formule $(*)$ grâce à la formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} q^k$.
2. Démontrer la formule $(*)$ par récurrence.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose : $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + x^{2^k})$.

1. Simplifier $(1-x)P_1$ puis $(1-x)P_2$ puis $(1-x)P_3$.
2. Émettre une conjecture sur la valeur de $(1-x)P_n$ puis la démontrer. En déduire la valeur de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$