NOM :

PRENOM :

Question 1 (/4 pts). Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\ln(x-1)+\ln(3-x)=0$.

On travaille pour x tel que $x-1>0$ et $3-x>0$ c'est-à-dire $x>1$ et $x<3$ c'est-à-dire pour $x \in]1,3[$: on a alors

$\ln(x-1)+\ln(3-x)=0 \iff \ln((x-1)(3-x))=0$

$\iff (x-1)(3-x)=1 \iff -x^2+3x+x-3=1$

$\iff x^2-4x+4=0 \iff (x-2)^2=0 \iff x-2=0$

$\iff x=2$

Et comme $2 \in]1,3[$, l'ensemble des solutions est $S=\{2\}$.

Question 2 (/6 pts). Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(k)$.

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im}(e^{ik}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{i})^k\right)$$

Or $e^{i}=e^{1i}=\cos(1)+i\sin(1)\neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}(e^{i})^k = \frac{1-(e^{i})^{n+1}}{1-e^{i}} = \frac{e^{(n+1)i}-1}{e^{i}-1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}}\left(e^{i\frac{n+1}{2}}-e^{-i\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\frac{i}{2}}\left(e^{\frac{i}{2}}-e^{-i/2}\right)}$$

$$= e^{i\frac{n}{2}} \times \frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \times \left(\cos\left(\frac{n}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n}{2}\right)\right)$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sin\left(\frac{n}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/4 pts). Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\ln(x-2)+\ln(4-x)=0$.

On travaille pour x tel que $x-2>0$ et $4-x>0$ c'est-à-dire $x>2$ et $x<4$ c'est-à-dire $x\in]2,4[$: on a alors

$\ln(x-2)+\ln(4-x)=0 \iff \ln((x-2)(4-x))=0$

$\iff (x-2)(4-x)=1 \iff -x^2+4x+2x-8=1$

$\iff x^2-6x+9=0 \iff (x-3)^2=0 \iff x-3=0$

$\iff x=3$

Et comme $3\in]2,4[$, l'ensemble des solutions est $S=\{3\}$.

Question 2 (/6 pts). Calculer pour $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k)$.

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}(e^{ik})=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ik}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{i})^{k}\right)$$

Or $e^{i}=e^{1i}=\cos(1)+i\sin(1)\neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n}(e^{i})^{k}=\frac{1-(e^{i})^{n+1}}{1-e^{i}}=\frac{e^{(n+1)i}-1}{e^{i}-1}=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}}\left(e^{i\frac{n+1}{2}}-e^{-i\frac{n+1}{2}}\right)}{e^{\frac{i}{2}}\left(e^{\frac{i}{2}}-e^{-\frac{i}{2}}\right)}$$

$$=e^{i\frac{n}{2}}\times\frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\times\left(\cos\left(\frac{n}{2}\right)+i\sin\left(\frac{n}{2}\right)\right)$$

En prenant la partie réelle, on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k)=\cos\left(\frac{n}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}.$$