
Mathématiques - mercredi 15 novembre 2023
Devoir n°3 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet est constitué de 5 exercices indépendants.**
- **On ne rendra pas le sujet avec la copie. Les élèves qui rendront le sujet avec la copie auront un point de moins.**
- **Les fautes d'orthographe seront lourdement pénalisées.**

Exercice 1.

1. (a) Énoncer les formules d'Euler.
   (b) Linéariser $\sin^2(\theta)\cos(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
2. (a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $|z+2| = |z-2i|$.
   (b) Décrire géométriquement l'ensemble des solutions et le représenter sur un schéma.
3. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=5}^{n} \ln(k+2)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$.

Exercice 2.

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$: $z^2 + 2z + 2 = 0$.
2. Déterminer la forme exponentielle des solutions trouvées en 1.
3. En déduire les solutions sur $\mathbb{C}$ de : $e^{2z} + 2e^z + 2 = 0$.

Exercice 3.

Dans cet exercice on cherche à résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2iz - 4 + 4i = 0$.

1. Expliquez pourquoi, a priori, la formule du cours avec le discriminant ne s'applique pas ici.
2. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E) si et seulement si $(z-i)^2 = 3 - 4i$.
3. Résoudre l'équation $\omega^2 = 3 - 4i$ d'inconnue $\omega \in \mathbb{C}$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4.

Dans cet exercice, on étudie de trois manières différentes la suite complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$z_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = iz_n + 3 - i.$$

1. *En revenant aux suites réelles.*
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \mathcal{R}e(z_n)$, $y_n = \mathcal{I}m(z_n)$ et $a_n = x_n - 2$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.
   (b) Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre deux suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -a_n$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 2 + \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + i\left(1 - \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$.

2. *En s'inspirant des suites arithmético-géométriques.*
   (a) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z = iz+3-i$. On note ℓ la solution trouvée, qu'on exprimera sous forme algébrique.
   (b) Que peut-on dire de la suite $(w_n)_{n\geq 0} = (z_n - \ell)_{n\geq 0}$?
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 2 + i - i^{n+1}$, puis retrouver le résultat de la question 1(c).

3. *Géométriquement.*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note M_n le point du plan d'affixe z_n.
   (a) Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4, et placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 sur un schéma.
   (b) Si M est un point d'affixe z, comment obtenir géométriquement le point M' d'affixe iz ? le point M'' d'affixe $iz + 3 - i$?
   (c) D'après le schéma, que peut-on dire pour tout $n \in \mathbb{N}$ de M_n et M_{n+4} ? Par conséquent où se situe le point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?
   (d) Retrouver le résultat de la question 3(c) en utilisant la formule de la question 1(c).

Exercice 5.
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\min(a, b)$ (respectivement $\max(a, b)$) le plus petit élément (respectivement le plus grand élément) entre a et b. En d'autres termes :

$$\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } a > b \end{cases} \quad \text{et} \quad \max(a,b) = \begin{cases} b & \text{si } a \leq b \\ a & \text{si } a > b \end{cases}$$

Dans cet exercice, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on souhaite calculer les sommes

$$S_n = \sum_{k=n}^{3n} \min(k, 2n) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=n}^{3n} \max(k, 2n).$$

1. (a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k$.
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq 3n$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{3n} 2n$.
   (c) En effectuant un découpage judicieux, déduire des deux questions précédentes que $S_n = \dfrac{n(7n+3)}{2}$.
2. En effectuant un découpage similaire à celui de la question 1, déterminer la valeur de T_n.
3. Dans cette question, on propose de retrouver la valeur de T_n trouvée à la question 2 par un autre argument.
   (a) Démontrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a : $\min(a, b) + \max(a, b) = a + b$.
   (b) En déduire la valeur de $S_n + T_n$.
   (c) Retrouver alors la valeur de T_n en utilisant celle de S_n.
4. *Question bonus (ne sera corrigée que si toutes les questions précédentes sont traitées proprement) :* calculer pour $n \in \mathbb{N}$ les sommes doubles suivantes : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i, j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i, j)$.
5. *Question super bonus (ne sera corrigée que si toutes les questions précédentes sont traitées proprement) :* calculer pour $n \in \mathbb{N}$ la somme triple suivante : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \min(i, j, k)$.